MODELO POISSON NA DISTRIBUIÇÃO DE CHEGADAS DE CLIENTES

Lilian Mari Kieling Ries

Departamento de Matemática. Centro de Ciências Naturais e Exatas. UFSM. Santa Maria, RS.

Ricardo Iserhardt Ries

Departamento de Engenharia Industrial. Centro de Tecnologia . UFSM. Santa Maria, RS.

RESUMO

O artigo analisa a distribuição de chegadas de clientes a um supermercado e utiliza o teste de aderência Qui-Quadrado para verificar se as mesmas se ajustam ao modelo Poisson.

SUMMARY

RIES,L.M.K. and RIES,R.I., 1979. Poisson Model in the distribution of Client Arrivals. Ciência e Natura (1): 31-38.

The article analyses the distribution of client arrivals to a supermarket. The adherence Q-Square test is used to check if the arrivals agrees with the Poisson model.

INTRODUÇÃO

O modelo de distribuição de chegadas dos clientes,num sistema de filas de espera, é um fator importante e deve ser analisado com bastante rigorismo.

Segundo a bibliografia especializada, o modelo de distribuição de chegadas de clientes que se verifica com mais freqüência segue uma distribuição segundo o modelo Poisson.

Em razão disto, para analisar o processo de chegadas de clientes a um supermercado partiu-se da premissa que estas ocorreriam segundo o modelo Poisson. Para testar o ajustamento dos dados coletados ao modelo Poisson foi utilizado o teste Qui-Quadrado, de aderência.

MODELO POISSON DE CHEGADAS

Considere-se α, o intervalo de tempo médio entre duas chegadas consecutivas e λ a taxa média de chegadas na unidade de tempo.

Portanto:

$$\lambda = \frac{1}{\alpha}$$

Como os clientes não chegam simultaneamente e sim um por vez, a probabilidade de chegada de um cliente, em um intevalo de tempo dt, após a chegada de um anterior, será diretamente proporcional a dt e inversamente proporcional a α.

Logo:

$$P_1(dt) = \frac{dt}{\alpha}$$

ou

$$P_1(dt) = \lambda\, dt$$

A probabilidade de não chegar nenhum cliente no intervalo de tempo dt, será:

$$P_0(dt) = 1 - P_1(dt)$$

$$P_0(dt) = 1 - \lambda\, dt$$

A probabilidade de terem chegado n clientes no período t e nenhum no intervalo dt será dada por:

$$P_n(t).(1-\lambda\, dt) \qquad (1)$$

A probabilidade de terem chegado n-1 elementos no período t e um intervalo dt será:

$$P_{n-1}(t).\lambda dt \qquad (2)$$

A soma das probabilidades dadas por (1) e (2) nos fornece a probabilidade de haverem chegado n elementos no intervalo(t + dt). Portanto:

$$P_n(t+dt) = P_n(t)(1 - \lambda dt) + P_{n-1}(t).\lambda dt \quad \text{para } n \geq 1$$

ou

$$P_n(t+dt) - P_n(t) = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t)$$

Levando ao limite com $dt \to 0$, teremos:

$$P'_n(t) = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t), \text{ com } n \geq 1 \qquad (3)$$

A probabilidade de não chegar nenhum cliente no intervalo t+dt será correspondente ao produto da probabilidade de não haver chegado nenhum elemento no período t pela probabilidade de não haver chegado nenhum elemento no período dt. Logo:

$$P_0(t+dt) = P_0(t).(1 - \lambda dt)$$

ou

$$P_0(t+dt) - P_0(t) = -\lambda P_0(t) dt$$

$$\frac{P_0(t+dt) - P_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t)$$

Levando ao limite com $dt \to 0$, teremos:

$$P'_0(t) = -\lambda P_0(t) \qquad (4)$$

Segundo NOVAES (1), através do cálculo diferencial e da transformada de CARSON-LAPLACE, as expressões (3) e (4) fornecem as probabilidades:

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}$$

$$P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$$

$$P_2(t) = \frac{(\lambda t)^2 e^{-\lambda t}}{2}$$

$$\vdots$$

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} \quad \text{com } n = 0,1,2 \text{ e } \lambda > 0$$

Esta expressão fornece a probabilidade de haverem chegado n elementos no intervalo t+dt; representa uma distribuição de Poisson, com média λt e variância λt.

DETERMINAÇÃO DAS CHEGADAS DE CLIENTES

Para verificar o mecanismo das chegadas, a coleta de dados foi efetuada, num supermercado, durante 149 dias, em períodos aleatórios. A unidade de tempo adotada foi de 15 minutos. Assim, foi determinado o número médio de clientes que chegaram ao supermercado em cada 15 minutos. Estes dados se encontram na Tabela I de Freqüência.

TABELA I. MECANISMO DE CHEGADAS DE CLIENTES AO SUPERMERCADO

CHEGADAS	FREQÜÊNCIA	CHEGADAS	FREQÜÊNCIA
15	0	41	9
16	1	42	6
17	0	43	7
18	1	44	7
19	1	45	4
20	2	46	4
21	0	47	3
22	3	48	4
23	1	49	2
24	2	50	1
25	1	51	2
26	2	52	1
27	1	53	1
28	2	54	1
29	3	55	1
30	2	56	2
31	4	57	1
32	3	58	1
33	5	59	1
34	6	60	2
35	7	61	1
36	6	62	0
37	8	63	1
38	8	64	2
39	7	65	1
40	8	T O T A L	149

Supondo que as chegadas dos clientes ao supermercado obedeçam ao processo Poisson, foi elaborado um programa para computador, conforme diagrama da Figura 1, a seguir, para verificar a ajustagem dos dados coletados. O teste de aderência aplicado foi do Qui-Quadra do de PEARSON. A listagem do programa e os resultados se encontram no Anexo I. Estes resultados permitem admitir que as chegadas dos clientes ao supermercado se ajustam razoavelmente a uma distribuição de Poisson com média de 39,5570 clientes por minutos.

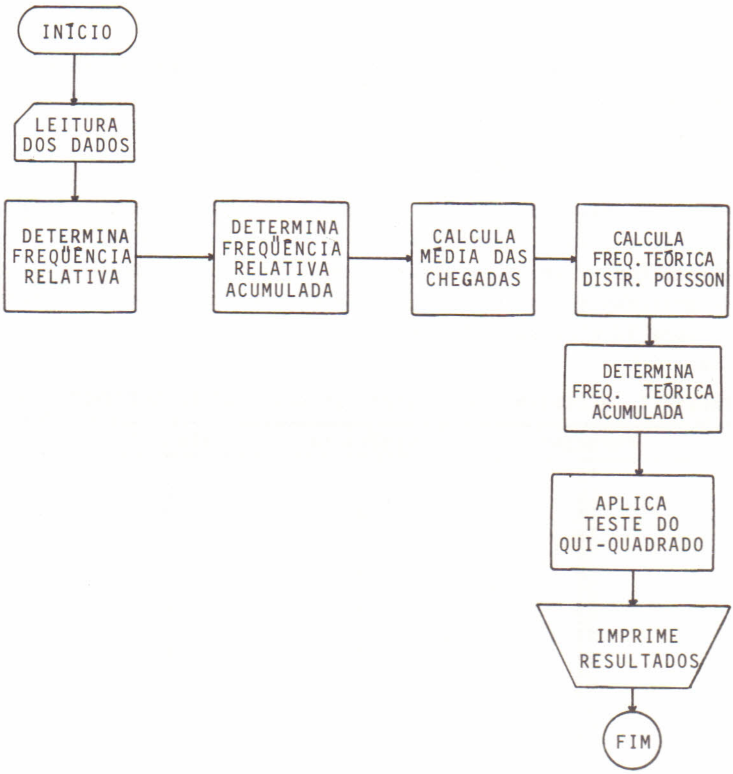

Figura 1. Análise da distribuição das chegadas de clientes.

O teste do Qui-Quadrado é dado por:

$$\chi_c^2 = \frac{(o_j - e_j)^2}{e_j}$$

onde, o_j são as freqüências relativas observadas e

e_j são as freqüências relativas teóricas. O resultado fornecido pelo teste foi: $\chi^2 = 17{,}0918$.

Como, para 50 graus de liberdade, ao nível de significância 0,05, temos $\chi^2_{0,95} = 67{,}5$, aceitamos a hipótese de que os dados observados seguem uma distribuição de Poisson.

Na Figura 2 foram representadas as freqüências observadas e as freqüências teóricas da distribuição de chegadas dos clientes ao supermercado. A Figura 3 mostra as freqüências relativas acumuladas, observadas e teóricas. Pode-se verificar, através destes gráficos, que a aproximação dos dados observados e teóricos é bem razoável.

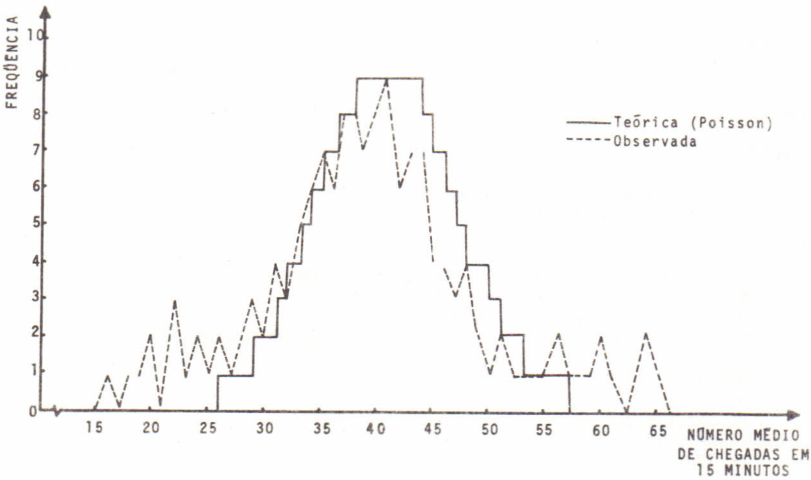

Figura 2. Distribuição das chegadas dos clientes ao supermercado.

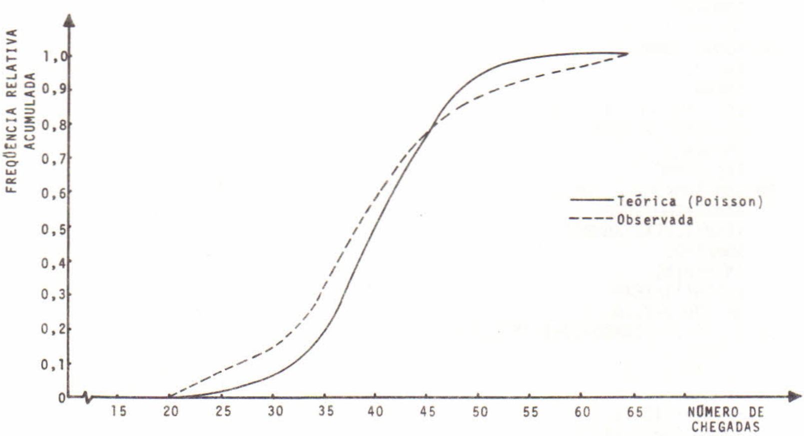

Figura 3. Distribuição cumulativa das chegadas dos clientes ao supermercado.

CONCLUSÃO

Considerando-se que o objetivo desta pesquisa era verificar se a distribuição de chegadas de clientes a um supermercado ocorre riam segundo o modelo Poisson, conclui-se, através de análise estatística, que as mesmas ocorrem segundo esta distribuição.

O modelo de computador para testar a ajustagem de dados a uma distribuição de Poisson foi construido de forma generalizada e pode ser utilizado para outras distribuições de chegadas.

BIBLIOGRAFIA CITADA

1. NOVAES, A.G. *Pesquisa operacional e transportes: modelos probabilísticos*. São Paulo, Mc Graw-Hill do Brasil, 1975. 293 p.

Recebido em outubro, 1979; aceito em outubro, 1979.

ANEXO I

```
C     ANALISE ESTATISTICA DAS CHEGADAS
C     DISTRIBUICAO DE POISSON
C
C
C     AMBD= NUMERO MEDIO TOTAL DE CHEGADAS OBSERVADAS
C     NCH(J)= NUMERO MEDIO DE CHEGADAS P/15 MIN.
C     NP(J)= FREQUENCIA OBSERVADA DE NCH(J)
      DIMENSION NCH(100),NP(100),PA(100),P(100),PP(100),SOMPP(100),NFE(1
     1 00)
      DIMENSION XNFE(100),DIF(100),POISS(100)
      J=1
    3 READ(8,100)NCH(J),NP(J)
  100 FORMAT(2I3)
      IF(NCH(J))4,5,5
    5 J=J+1
      GOTO 3
    4 N=J-1
      SOMNP=0.
      DO 110 J=1,N
  100 SOMNP=SOMNP+NP(J)
      PAC=0.
      SOM=0.
      DO 120 J=1,N
      P(J)=NP(J)/SOMNP
      PAC=PAC+P(J)
      PA(J)=PAC
  120 SOM=SOM+NCH(J)*NP(J)
      XAMBD=SOM/SOMNP
      XEXP=1./EXP(XAMBD)
      SOMAT=0.
      IN=NCH(N)
      POISS(1)=XEXP
      DO 230 J=2,IN
  230 POISS(J)=(XAMBD/(J-1))*POISS(J-1)
      L=NCH(1)-1
      DO 140 J=1,N
      LL=J+L
      PP(J)=POISS(LL)
      SOMAT=SOMAT+PP(J)
  140 SOMPP(J)=SOMAT
      WRITE(5,150)XAMBD,N
  150 FORMAT(1H1,///,15X,'ESTUDO ESTATISTICO DAS CHEGADAS',//,15X,'NUMER
     1O MEDIO DE CHEGADAS POR 15 MIN.=',F10.4,//,15X,'NUMERO DE DADOS  CO
     2LETADOS =',I5)
      WRITE(5,90)
```

```
 90 FORMAT(//,10X,'NUM.DE ',3X'FREQ.',3X,'FREQ.',3X,'FREQ.',3X,'FREQ.
   1 ',3X,'FREQ.TEOR.',/,10X,'CHEGADAS',3X,'OBSERV',3X,'RELAT',3X,'ACU
   2 .',3X,'TEOR',3X,'TEOR:AC.',3X,'FREQ.ESP.')
     SOMDF=0.
     DO 170 J=1,N
     NFE(J)=(PP(J)*SOMNP+0.5)
     XNFE(J)=(PP(J)*SOMNF+0.5)
     DIF(J)=((P(J)-PP(J))**2)/PP(J)
170  SOMDF=SOMDF+DIF(J)
     WRITE(5,160)(NCH(J),NP(J),P(J),PA(J),PP(J),SOMPP(J),NFE(J),J=1,N)
160  FORMAT(12X,I4,5X,13,4F9.3,3X,I4)
     WRITE(5,300)SOMDF
300  FORMAT(//,10X,'X**2 = ',F10.4)
     CALL EXIT
     END
```

ESTUDO ESTATISTICO DAS CHEGADAS

NUMERO MEDIO DE CHEGADAS POR 15 MIN. = 39.5570

NUMERO DE DADOS COLETADOS - 51

NUM.DE CHEGADAS	FREQ. OBSERV.	FREQ. RELAT.	FREQ. ACUM.	FREQ. TEOR.	FREQ. TEOR.AC.	FREQ. ESP.
15	0	0.0	0.0	0.000	0.000	0
16	1	0.007	0.007	0.000	0.000	0
17	0	0.0	0.007	0.000	0.000	0
18	1	0.007	0.013	0.000	0.000	0
19	1	0.007	0.020	0.000	0.000	0
20	2	0.013	0.034	0.000	0.000	0
21	0	0.0	0.034	0.000	0.000	0
22	3	0.020	0.054	0.000	0.001	0
23	1	0.007	0.060	0.001	0.002	0
24	2	0.013	0.074	0.001	0.003	0
25	1	0.007	0.081	0.002	0.005	0
26	2	0.013	0.094	0.004	0.009	1
27	1	0.007	0.101	0.006	0.015	1
28	2	0.013	0.114	0.008	0.023	1
29	3	0.020	0.134	0.011	0.034	2
30	2	0.013	0.148	0.016	0.050	2
31	4	0.027	0.174	0.021	0.070	3
32	3	0.020	0.195	0.026	0.097	4
33	5	0.034	0.228	0.032	0.129	5
34	6	0.040	0.268	0.039	0.168	6
35	7	0.047	0.315	0.045	0.213	7
36	6	0.040	0.356	0.051	0.265	8
37	8	0.054	0.409	0.056	0.321	8
38	8	0.054	0.463	0.060	0.381	9
39	7	0.047	0.510	0.063	0.443	9
40	8	0.054	0.564	0.063	0.507	9
41	9	0.060	0.624	0.063	0.570	9
42	6	0.040	0.664	0.061	0.630	9
43	7	0.047	0.711	0.057	0.687	9
44	7	0.047	0.758	0.052	0.740	8
45	4	0.027	0.785	0.047	0.787	7
46	4	0.027	0.812	0.041	0.829	6
47	3	0.020	0.832	0.036	0.864	5
48	4	0.027	0.859	0.030	0.894	4
49	2	0.013	0.872	0.025	0.919	4
50	1	0.007	0.879	0.020	0.939	3
51	2	0.013	0.893	0.016	0.995	2
52	1	0.007	0.899	0.012	0.967	2

53	1	0.007	0.906	0.009	0.976	1
54	1	0.007	0.913	0.007	0.983	1
55	1	0.007	0.919	0.005	0.988	1
56	2	0.013	0.933	0.004	0.992	1
57	1	0.007	0.940	0.003	0.995	0
58	1	0.007	0.946	0.002	0.996	0
59	1	0.007	0.953	0.001	0.998	0
60	2	0.013	0.966	0.001	0.999	0
61	1	0.007	0.973	0.001	0.999	0
62	0	0.0	0.973	0.000	0.999	0
63	1	0.007	0.980	0.000	1.000	0
64	2	0.013	0.993	0.000	1.000	0
65	1	0.007	1.000	0.000	1.000	0

X**2 = 17.0918