EXISTÊNCIA DE OPERADORES DE ONDA E SOLUÇÕES ASSINTÓTICAS PARA SISTEMAS HIPERBÓLICOS SIMÉTRICOS

Vanilde Bisognin

Departamento de Matemática. Centro de Ciências Naturais e Exatas. UFSM. Santa Maria, RS.

RESUMO

Este trabalho focaliza alguns sistemas de equações diferenciais parciais do tipo hiperbólico, dando ênfase ao seu comportamento assintótico. Fez-se uma análise comparativa entre um sistema hiperbólico descrevendo um meio não homogêneo com outro que descreve um meio homogêneo; esta correspondência é permitida em virtude da existência dos chamados operadores de onda.

Vários exemplos importantes da física-matemática são apresentados e o teorema central deste trabalho, sobre a existência dos operadores de onda, foi aplicado aos modelos.

SUMMARY

BISOGNIN,V., 1979. Existence of wave operators and assynthotic solutions to symmetric hyperbolic systems. Ciência e Natura (1): 21-30.

This work focuses on some partially differential equation systems of the hyperbolic type, emphatizing its assynthotic behavior. A comparative analysis between a hyperbolic system describing a non homogeneous mean with a homogeneous one, was made; this correspondence was made possible due to the existence of the so-called wave operators.

Several important exemples from mathematical-physics were presented. The central theorem of this work, concerning the existence of wave operators, was applied to the models.

INTRODUÇÃO

Muitos dos fenômenos de propagação de ondas da física clássica são governados por sistemas de equações diferenciais parciais de primeira ordem da forma

$$(1) \quad E(x)\,\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n} A^j\,\frac{\partial u}{\partial x_j}$$

onde $x = (x_1, X_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, $u = u(x,t)$ é uma mx1 matriz real que descreve o estado do meio na posição x e o tempo t. $E(x), A^1, A^2$,

..., A^n são mxm matrizes com as seguintes propriedades:

(i) $E(x)$ é real, simétrica e positiva definida;

(ii) A^j para, $j=1,\ldots,n$ são reais, simétricas e constantes.

O sistema (1) descreve um meio homogêneo se a matriz $E(x)=E^0$ é uma matriz constante. Caso contrário o meio descrito é dito não homogêneo.

Neste trabalho temos como objetivo estudar o sistema (1) preocupando-nos do seu comportamento assintótico. Procuraremos fazer uma análise comparativa entre um modelo matemático descrevendo um meio não homogêneo com outro que corresponde a um meio homogêneo. Veremos que esta comparação nos é permitida em virtude da existência dos chamados "Operadores de Onda".

As referências básicas nesta linha de pesquisa, são os trabalhos de WILCOX(4), LAX & PHILLIPS(3) e COSTA(2).

Várias equações de ondas da física clássica podem ser escritas na forma do sistema (1). Entre estas citamos:

Exemplo 1. AS EQUAÇÕES DAS LINHAS DE TRANSMISSÃO

As equações

$$L(x)\,\frac{\partial i}{\partial t} + \frac{\partial e}{\partial x} = 0 \quad , \quad C(x)\,\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial i}{\partial x} = 0$$

governam a corrente i e a tensão e numa linha de transmissão, onde $L(x)$ e $C(x)$ representam a indutância e a capacitância por unidade de comprimento da linha.

Estas equações podem ser colocadas na forma do sistema(1) com

$$u=(i,e)^t$$

$$E(x)=\begin{bmatrix} L(x) & 0 \\ 0 & C(x) \end{bmatrix} \quad , \quad A^1=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Temos portanto:

$$\begin{bmatrix} L(x) & 0 \\ 0 & C(x) \end{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}$$

Exemplo 2. EQUAÇÃO DAS ONDAS ACÚSTICAS

Em um meio não-homogêneo, a equação que governa a propagação de ondas acústicas tem a forma

$$\frac{1}{C^2(x)}\,\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \rho(x)\ \mathrm{div}\ \left(\frac{1}{\rho(x)}\,\nabla p\right)$$

onde $x=(x_1, x_2, x_3) \in R^3$, $p=p(x,t)$ é a diferença entre a pressão instantânea e a pressão de equilíbrio, $C(x)$ é a velocidade do som e $\rho(x)$ é a densidade do equilíbrio.

Pondo $u=(\frac{1}{\rho(x)} \frac{\partial p}{\partial x_1}, \frac{1}{\rho(x)} \frac{\partial p}{\partial x_2}, \frac{1}{\rho(x)} \frac{\partial p}{\partial x_3}, \frac{\partial p}{\partial t})^t$ a equação pode ser escrita na forma do sistema:

$$E(x) \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{j=1}^{3} A^j \frac{\partial u}{\partial x_j} \quad \text{onde}$$

$$E(x)= \begin{bmatrix} \rho(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho(x) & 0 \\ 0 & 0 & & \frac{1}{\rho(x)\, C^2(x)} \end{bmatrix} \text{e}$$

$$\sum_{j=1}^{3} A^j \frac{\partial}{\partial x_j} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \end{bmatrix}$$

Entre outros exemplos citamos: As equações de MAXWELL do eletromagnetismo, as equações da elasticidade e as equações em Magneto-gas-dinâmica. Todas estas equações podem ser escritas na forma do sistema (1) conforme (1) e (8).

Tendo em vista que os problemas de propagação de ondas em um meio homogêneo podem ser resolvidos explicitamente, os resultados fornecem soluções assintóticas dos problemas de propagação de ondas para um meio não homogêneo.

O PROBLEMA DE CAUCHY PARA SISTEMAS HIPERBÓLICOS SIMÉTRICOS EM UM MEIO HOMOGÊNEO

O sistema de equações diferenciais parciais descrevendo um meio homogêneo é escrito

$$(2) \quad E^o \frac{\partial u^o}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n} A^j \frac{\partial u^o}{\partial x_j}, \; x \in \mathbb{R}^n, \; t \in \mathbb{R}$$

$$(3) \quad u^o(x,0)=\phi(x)$$

onde E^o, A^j, $j=1,\ldots,n$ são mxm matrizes com as seguintes propriedades:

(i) E^o é real, simétrica e positiva definida;

(ii) A^j, $j=1,\ldots,n$ são reais, simétricas e constantes.

Vamos considerar como solução deste problema, um grupo de operadores unitários $\{U_0(t),\ t \in R\}$ definido em um espaço de HILBERT H_0 constituido de valores iniciais com energia finita, isto é:

$$U_0(t): H_0 \to H_0$$
$$\phi \to u^0(\cdot,t) = U_0(t)\phi$$

Para construir o operador solução $U_0(t)$ usaremos o "Teorema de STONE": Se $\{U_0(t),\ t \in R\}$ é um grupo fortemente contínuo de operadores unitários em H_0, então:

(4) $U_0(t) = e^{-it A_0}$ onde A_0 é um operador autoadjunto e reciprocamente se A_0 é um operador autoadjunto em H_0 então iA_0 gera um grupo fortemente contínuo de operadores $\{U_0(t),\ t \in R\}$ unitários em H_0 onde $i = \sqrt{-1}$.

Portanto, se $U_0(t) = e^{-it A_0}$ define o operador solução para o problema (2) (3) então, formalmente,

$$\frac{\partial u^0}{\partial t} = (E^0)^{-1} \sum_{j=1}^{n} A^j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Vamos, primeiramente, construir uma extensão autoadjunta do operador diferencial A_0 em um espaço de HILBERT H_0 e então definir o operador solução por (4).

A matriz E^0 é uma matriz mxm, real, simétrica e portanto hermitiana e positiva definida. Daí segue-se que:

(6) $\lambda^2 \sum_{i=1}^{m} |\alpha_i|^2 \le \alpha^* E^0 \bar{\alpha} \le \lambda_1^2 \sum_{i=1}^{m} |\alpha_i|^2, \forall\, \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{C}^m$

onde $\bar{\alpha}$ é o complexo conjugado de α, λ e λ_1 são constantes reais positivas e são o maior e o menor dos autovalores de E^0.

Se $\phi(x) = (\phi_1(x), \dots, \phi_m(x))$ então, integrando (6) em R^n tem-se:

(7) $\lambda^2 \sum_{i=1}^{m} \int_{\mathbb{R}^n} |\phi_i(x)|^2\, dx \le \int_{\mathbb{R}^n} \phi^*(x) E^0\, \overline{\phi(x)}\, dx \le \lambda_1^2 \cdot \sum_{i=1}^{m} \int_{\mathbb{R}^n} |\phi_i(x)|^2 dx$

Assim, se a energia para um meio homogêneo é definida por: $\int_{R^n} \phi^*(x)\, E^0\, \overline{\phi(x)} dx$ então (7) implica que $\phi(x)$ tem energia finita se, e somente se, para cada $i=1,\dots,m$, $\phi_i(x) \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Portanto, o espaço $\bigoplus_{i=1}^{m} L^2(\mathbb{R}^n)$ é o espaço vetorial apropriado de valores iniciais com energia finita para o problema de propagação (2), (3). Este espaço é um espaço de HILBERT que indicaremos por H_0 em relação ao produto interno $(,)_0$ definido por:

(8) $(\phi, \psi)_0 = \int_{\mathbb{R}^n} \phi^*(x)\ E^0\ \psi(x) dx$

Afim de aplicarmos o Teorema de STONE necessitamos provar que o operador A_0 é um operador autoadjunto sobre o espaço H_0.

Observemos que se $\dot{\phi}(x)$ e $\frac{\partial\phi(x)}{\partial x_j}$ ε H_0 então, para cada $j=1,\ldots,n$

$$A_0\ \phi = i(E^o)^{-1}\sum_{j=1}^{n} A^j \frac{\partial\phi}{\partial x_j} \in H_0$$

Usando a Transformada de Fourier temos que:

$$(A_0\ \phi)\ (p) = (E^o)^{-1}\sum_{j=1}^{n} A^j\ p_j\ .\ \hat{\Phi}(p)$$

Teorema 1. o operador A_0 com domínio:

$$D(A) = \{\ \phi \in H_0,\ \hat{\Phi}(p) \in H_0,\ \sum_{j=1}^{n} A^j\ p_j\ \hat{\Phi}\ (p) \in H_0\}$$ e definido por

$$(A_0\phi)\ (x) = \frac{1}{(2\Pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix.p}(E^o)^{-1}(\sum_{j=1}^{n} A^j p_j)\ \hat{\Phi}(p)\ dp$$ é um operador auto-adjunto em relação ao produto interno definido em (8) A prova deste teorema foi desenvolvida por BISOGNIN (1).

Temos portanto um grupo de operadores unitários $\{U_0(t), t \in \mathbb{R}\}$ associado ao problema de propagação para um meio homogêneo valendo a representação:

$$U_0(t) = e^{-itA_0}$$ e

$$u^o(x,t) = U_0(t)\phi(x) = e^{-it\,A_0}\ \phi\ (x)$$ é a solução do problema de propagação para o meio homogêneo.

O PROBLEMA DE CAUCHY PARA SISTEMAS HIPERBÓLICOS SIMÉTRICOS EM UM MEIO NÃO HOMOGÊNEO

Para um meio não homogêneo temos o seguinte sistema de equações doferenciais parciais:

$$(9)\quad E(x)\ \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n} A^j\ \frac{\partial u}{\partial x_j}\ ,\ x \in \mathbb{R}^n,\ t \in \mathbb{R}$$

$$(10)\quad u(x,0) = \phi(x)$$

onde $E(x)$, A^j, para $j=1,\ldots,n$ são matrizes mxm com as mesmas propriedades do problema para o meio homogêneo.

Do mesmo modo, como no problema anterior vamos considerar como solução deste problema um grupo de operadores unitário $\{U(t), t \in \mathbb{R}\}$ definido em um espaço de HILBERT H constituído de valores iniciais com energia finita, isto é:

$$U(t):\ H \to H$$
$$\phi \to u(\cdot,t) = U(t)\phi$$

Pela teorema de STONE temos que $U(t) = e^{-itA}$ onde A é um operador autoadjunto em H.

Se $U(t)=\bar{e}^{itA}$ representa o operador solução para o problema (9) (10) então:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=(E(x))^{-1}\sum_{j=1}^{n} A^j \frac{\partial u}{\partial x_j} = -\, i\, A\, u \quad \text{onde}$$

$$A = i(E(x))^{-1}\sum_{j=1}^{n} A^j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Vamos mostrar que o operador A é autoadjunto em um espaço de HILBERT H a fim de podermos aplicar o Teorema de STONE.

Assumiremos que as formas quadráticas determinadas pelas matrizes $E(x)$ e E^o são equivalentes, isto é, existem constantes C e C_1 tais que:

$$C^2\ \alpha^*\ E^o\ \bar{\alpha} \leq \alpha^* E(x)\ \bar{\alpha} \leq C_1^2\ \alpha^*\ E^o\ \bar{\alpha}\ ,\ \forall\ x \in \mathbb{R}^n,\ \alpha \in \mathbb{C}^m;$$

combinando esta relação com (6) temos:

$$(11)\quad \mu^2 \sum_{i=1}^{m} |\alpha_i|^2 \leq \alpha^*\ E(x)\ \bar{\alpha} \leq \mu_1^2 \sum_{i=1}^{m} |\alpha_i|^2,\ \forall\ x \in \mathbb{R}^n,\ \alpha \in \mathbb{C}^m$$

onde $\mu=\lambda C$ e $\mu_1=\lambda_1\ C_1$

Os elementos $E_{ij}(x)$ de $E(x)$ serão considerados como sendo funções Lebesgue mensuráveis em $\mathbb{R}^n$. Daí, de (11), segue-se que para cada vetor $\phi(x)=(\phi_1(x),\ldots,\phi_m(x))$ mensurável vale a relação,

$$(12)\quad \mu^2 \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{m} |\phi_i(x)|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \phi^*(x)\ E(x)\ \overline{\phi(x)}dx \leq \mu_1^2 \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{m} |\phi(x)|^2 dx$$

Se a energia para o meio não homogêneo é definida por $\int_{R^n} \phi^*(x)\ E(x)\ \overline{\phi(x)}dx$ então $\phi\ (x)$ tem energia finita se, e somente para cada $i=1,\ldots,m$ $\phi_i(x) \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Portanto, também neste caso o espaço vetorial de valores iniciais com energia finita é o espaço $\bigoplus_{i=1}^{m} L^2(\mathbb{R}^n)$ que é um espaço de HILBERT que indicaremos por H em relação ao produto interno definido por

$$(13)\quad (\phi\ ,\psi)= \int_{R^n} \phi^*(x)\ E(x)\ \overline{\psi(x)}dx$$

O operador A pode ser escrito:

$$A=i\ E(x)^{-1}\ E^o\ (E^o)^{-1} \sum_{j=1}^{n} A^j \frac{\partial}{\partial x_j} = E(x)^{-1}\ E^o\ A_0$$

Teorema 2. O operador A com $D(A)=D(A_0)$ definido por $(A\phi)(x)= E(x)^{-1} E^o(A_0\phi)(x)$ é um operador autoadjunto em relação ao produto interno $(,)$ definido em (13).

Para sua demonstração ver BISOGNIN (1).

Temos assim, o grupo de operadores unitários $\{U(t), t \in R\}$ associado ao problema de propagação em um meio não homogêneo cuja representação é $U(t)=e^{-itA}$ e

$u(x,t)= U(t)\phi(x)=e^{-itA}\phi(x)$ é a solução do problema de propagação para o meio não homogêneo.

ANÁLISE COMPARATIVA DOS MODELOS

Queremos encontrar condições que nos assegurem que $u(x,t)$, isto é, a solução do problema de propagação para um meio não homogêneo, seja assintóticamente igual a $u^0(x,t)$, isto é, a solução do problema de propagação para um meio homogêneo quando $t\to\pm\infty$. Veremos que esta igualdade assintótica é possível em virtude da existência dos chamados "Operadores de Onda".

Suponhamos que dados $\phi\pm \in H_0$ existe $\phi \in H$ tal que $\lim\limits_{t\to\pm\infty} \|u(\cdot,t)-u^0_\pm(\cdot,t)\| = \lim\limits_{t\to\pm\infty} \|U(t)\phi - U_0(t)\phi\pm\| = 0$, isto é, $U(t)\phi$ comporta-se como $U_0(t)\phi_+$ no futuro e como $U_0(t)\phi-$ no passado.

Tendo em vista as representações:

$U(t)=e^{-itA}$ a $U_0(t)=e^{-itA_0}$ e o fato de que $U(t)$ é unitário podemos escrever o limite anterior como:

(14) $\lim\limits_{t\to\pm\infty} \| e^{-itA}\phi - e^{-itA_0}\phi\pm\| = \lim\limits_{t\to\pm\infty} \|\phi - e^{+itA} e^{-itA_0}\phi\pm\| = 0$

A expressão (14) nos sugere definir os Operadores de Onda como:

(15) $\Omega_\pm = \Omega_\pm(A,A_0) = S\text{-}\lim\limits_{t\to\pm\infty} e^{itA} e^{-itA_0}$ (limites fortes)

Portanto, cada solução $u(x,t)$ é assintóticamente igual à solução $u^0_+(x,t)$ ou $u^0_-(x,t)$ se e somente se os operadores de onda $\Omega_\pm$, $H_0 \to H$ definidos por (15) existem e tem-se $\phi=\Omega_\pm \phi_\pm$.

Teorema 3. Se os operadores de ondas existem, então

(i) $\Omega_\pm$ são injetores e limitados valendo: $C\|\phi\|_0 \leq \|\Omega_\pm\phi\| \leq C_1\|\phi\|_0$, $\phi \in H_0$ e C, C_1 constantes positivas

(ii) $e^{-itA}\Omega_\pm = \Omega_\pm e^{-itA_0}$, $-\infty < t < \infty$

(iii) $A\,\Omega_\pm = \Omega_\pm A_0$

Assim, nos interessa descobrir condições que nos assegurem que os operadores de onda $\Omega_\pm$ existam. O teorema que provaremos a seguir nos dará uma condição suficiente para a existência de $\Omega_\pm$.

Teorema 4. Suponhamos que existe um conjunto $D \subseteq D(A)=D(A_0)$ denso em H_0 com a propriedade que, para cada $\phi \in D$, existe T finito (que pode depender de ϕ) tal que,

(i) $e^{-itA_0}\,\phi \in D(A_0) = D(A_0)$ para $0 < t < \infty$;

(ii) a função $t \to (A - A_0)\, e^{-itA_0}\,\phi$ é contínua em (T,∞); e

(16) $\displaystyle\int_T^\infty \|(A - A_0)\, e^{-itA_0}\,\phi\|\,dt < \infty$

Então, Ω_+ existe. Um resultado análogo é válido para Ω_-.

Demonstração:

Se $\Omega(t)\phi = e^{itA}\, e^{-itA_0}\,\phi$ define uma sequência de CAUCHY em H_0, quando $t \to +\infty$ $\Omega_+\,\phi = \lim\limits_{t\to+\infty} \Omega(t)\phi$ existe

Mostraremos que (16) implica que $\Omega(t)\phi$ define uma sequência de CAUCHY para cada $\phi \in H_0$.

Primeiramente, seja $\phi \in D$. Em virtude da hipótese (i) temos que $\Omega(t)\,\phi$ é diferenciável e

$$\frac{d}{dt}\left(e^{itA}\, e^{-itA_0}\,\phi\right) = i\, e^{itA}\,(A - A_0)\, e^{-itA_0}\,\phi ,$$

visto que A comuta com e^{itA}.

Além disso, usando a hipótese (ii) e o teorema fundamental do cálculo, obtemos:

$$\Omega(t)\phi - \Omega(s)\phi = i \int_s^t e^{i\sigma A}\,(A - A_0)\, e^{-i\sigma A_0}\,\phi\, d\sigma, \quad T \leq s \leq t$$

Tomando norma na expressão acima e observando que $e^{i\sigma A}$ é unitário, vem :

$$\|\Omega(t)\phi - \Omega(s)\phi\| = \left\| i \int_s^t e^{i\sigma A}\,(A - A_0)\, e^{-i\sigma A_0}\,\phi\, d\sigma\right\| \leq \int_s^t \|(A - A_0)e^{-i\sigma A_0}\phi\|\,d\sigma$$

Desta desigualdade e de (16), temos que :

$$\|\Omega(t)\phi - \Omega(s)\phi\| < \frac{\varepsilon}{2}\ , \ \varepsilon > 0$$

Segue-se, portanto, que $\Omega(t)\phi$ define uma sequência de CAUCHY quando $t \to +\infty$ para $\phi \in D$. Assim, $\Omega(t)\phi$ tem um limite, isto é, $\Omega_+\phi = \lim\limits_{t\to\pm\infty} \Omega(t)\phi$ para cada $\phi \in D$.

Agora, se $\psi \in H_0$ é um vetor arbitrário, então,

$$\|e^{itA}\, e^{-tA_0}\,\psi - e^{isA}\, e^{-isA_0}\,\psi\| \leq \|\Omega(+)\phi - \Omega(s)\phi\| + \|e^{itA}\, e^{-tA_0}(\psi - \phi)\| + \|e^{isA}\, e^{-sA_0}(\psi - \phi)\|$$

Da equivalência das normas $\|\ \|$ e $\|\ \|_0$ obtemos

$$\|e^{itA}\, e^{-itA_0}\,\psi - e^{isA_0}\psi\| \leq \|\Omega(t)\phi - \Omega(s)\phi\| + 2C_1\, \|\psi - \phi\|_0\ , \ C_1 > 0$$

Mas D é denso em H_0, assim,

$$\|\psi - \phi\|_0 < \varepsilon_1\ , \text{ onde } \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{4C_1}$$

Portanto:

$$\|e^{itA}\, e^{-itA_0}\,\psi - e^{isA}\, e^{-isA_0}\,\psi\| < \varepsilon$$

Assim $e^{itA}\,e^{-itA_0}\,\psi$ define uma sequência de CAUCHY, quando $t \to +\infty$ para todo $\psi \in H_0$. Logo o operador,

$$\Omega_+ = \lim_{t\to+\infty} e^{itA}\,e^{-itA_0}, \text{ existe} \qquad \text{c.q.d.}$$

É a partir deste teorema que iremos deduzir um critério de existência de Operadores de Onda e portanto de soluções assintóticas para sistemas hiperbólicos simétricos envolvendo meios não homogêneos ao qual são perturbações do meio homogêneo uniformemente propagativo. Antes disso vamos caracterizar o meio uniformemente propagativo.

Consideremos o sistema:

$$(17)\quad E^0 \frac{\partial u^0}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n} A^j \frac{\partial u^0}{\partial x_j}$$

Este sistema tem solução da forma:

(18) $u^0(x,t)=f\ (st - vx)\ C$ onde $f(\tau)$ é uma função de valor real para $t \in R$, $s \in R$, $v=(v_1, \ldots ,v_n) \in \mathbb{R}^n$ e $C=(C_1, \ldots ,C_m) \in R^m$ são constantes.

Se $f'(\tau) \neq 0$ então $u^0\ (x,t)$ é solução de (17) se, e somente se, (19) $(E^0 s - \sum_{j=1}^{n} A^j\ v_j)C=0$. Se $C \neq 0$ então (19) implica que:

(20) $\det\ (E^0 s - \sum_{j=1}^{n} A^j\ v_j)=0$, isto é, os hiperplanos $st-vx=$ constante são hiperplanos característicos para o sistema (17). As ondas planas (18) propagam-se na direção do vetor v com velocidade $\frac{s}{|v|}$ onde $|v|^2 = v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2$. Portanto, as velocidades normais para o sistema (19) são dadas pelas raízes s de (20) correspondentes ao vetor unitário v.

Um sistema e o meio descrito por ele é caracterizado como uniformemente propagativo pela observação de que as velocidades normais de tais sistemas tem multiplicidade constantes e sinais algébricos constantes independentes da direção de propagação.

Afim de aplicarmos o Teorema - 4 basta que encontremos condições que nos assegure a convergência da integral:

$\int_T^\infty \| (A - A_0)\ e^{-itA_0}\ \phi \|\, dt$, $\phi \in C_0^\infty\ (\mathbb{R}^n)$, T finito onde $C_0^\infty\ (\mathbb{R}^n)$ é o espaço das funções reais, infinitamente diferenciáveis com suporte compacto.

Teorema 5. Consideremos as matrizes $m\times m$, $E(x)$, E^0 e A^j, $j=1,\ldots , n$ com as seguintes propriedades:

(i) $E^0 \frac{\partial u^0}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n} A^j \frac{\partial u^0}{\partial x_j}$ é um sistema uniformemente propagativo;

(ii) a matriz $E(x)$, constituida por funções Lebesgue mensuráveis é limitada e uniformemente positiva definida, isto é, existem constan tes positivas μ e μ_1, tal que:

$\mu^2\alpha^*\alpha \leq \alpha^* E(x) \bar{\alpha} \leq \mu_1^2 \alpha^* \alpha$, $\forall x \in R^n$, $\alpha \in \mathbb{C}^m$

(iii) Existem constantes $K > 0$, $R > 0$ e $p>1$, tais que:

$|E_{ij}(x) - E^o_{ij}| \leq K |x|^{-p}$ para $|x| \geq R$ e $1 \leq i,j \leq m$

Então o operador de onda Ω_+ existe.

Não apresentaremos aqui a demonstração do teorema. Ao leitor interessado recomendamos ler (1).

Com as condições do teorema - 5 concluímos que o operador de onda Ω_+ existe e portanto temos que $u(\cdot,t) \approx u^o(;t)$ quando t cresce infinitamente.

CONCLUSÃO

A existência dos operadores de onda implica na existência de soluções assintóticas, quando $t \to \pm\infty$. Procura-se assim, condições que garantam que a aplicação $u \to u_+$ seja unitária. Nos últimos 30 anos muitos autores tem contribuído neste sentido, especialmente para perturbações da equação de SCHRÖNDINGER. No que se refere, aos sistemas hiperbólicos gerais este problema não está completamente resolvido.

BIBLIOGRAFIA CITADA

1. BISOGNIN,V. *Os operadores de onda para alguns sistemas de física -matemática*. Rio de Janeiro, 1978. (Tese de Mestrado-UFRJ).
2. COSTA,D. *Equações diferenciais hiperbólicas*. Rio de Janeiro,IMPA, 1977.
3. LAX,P.D. & PHILLIPS,R. *Scattering theory*. U.S.,Academic Press,1967.
4. WILCOX,C.H. *The domain of dependence ineguality and initial boundary value problems for symetric hyperbolic systems*. *In:*MATHEMATICAL RESEARCH CENTER, U.S. Technical Summary Rep. nº 333. Madison, p. 1-20, 1962.
5. WILCOX,C.H. *Wave operators and asymptotic solutions of wave propagation problems of classical physics*. Rach. Rat. Mech. Anal. U.S., *22*:37-38, 1966.

Recebido em outubro, 1979; aceito em outubro, 1979.