ESTUDO SOBRE BASES AXIOMÁTICAS NA GEOMETRIA E NA MATEMÁTICA EM GERAL

Irma Peroni

Departamento de Matemática. Centro de Ciências Naturais e Exatas. UFSM. Santa Maria, RS.

RESUMO

O artigo apresenta um estudo sobre a possível colocação de geometria dedutiva na escola secundária atual a partir de um enfoque do conhecimento do ponto de vista esquemático.

SUMMARY

PERONI, I., 1979. A Study on the Axiomatic Basis in Geometry and in Mathematics in General. Ciência e Natura (1): 11-20.

This work presents a study on a possible aspect of deductive geometry in the current secondary school, in which knowledge is viewed in conformity with a scheme.

INTRODUÇÃO

Este estudo fundamentou-se nos trabalhos de GONSETH(3) e SUTER(5) e corresponde à fase inicial de um trabalho em andamento que, no projeto, toma o nome de"Reformulação de Conteúdos Programáticos Face ao Movimento de Unificação das Matemáticas no Campo da Geometria Euclidiana a Nível de Segundo Grau". Consideramos que o ensino correto de Geometria é um instrumento de grande eficácia na formação intelectual do homem e por isso lamentamos a tendência de minimizá-lo nos programas.

Somos forçados a reconhecer que a Geometria, a partir de Euclides, reformulada e desenvolvida pelo trabalho de estudiosos, por mais de vinte séculos, estende-se em muitos detalhes que não são de valia para o homem comum e que, portanto, se tornam desnecessários como conteúdos básicos e obrigatórios dos programas escolares. Nestas perspectivas, torna-se desejável um estudo de Geometria mais ágil, desde que se conservem os valores fundamentais. Não pretendemos ver a cultura sob um prisma utilitário, mas, humildemente, reconhecer a amplitude do desenvolvimento científico e a necessidade de aprofundarmos aquele embasamento que é necessário para desenvolvermos um trabalho em busca da realização profissional e humana num prazo razoável de tempo. Disse o emitente professor GUILHERME de la PENHA no pronunciamento de abertura da XXVIII Reunião da Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência: "... devemos ser capazes de enfrentar o desafio de simplificar tão poderoso ferramental. Se o progresso nessa direção não se concretizar, o status e o respeito que a comunidade matemática ainda grangeia, decairá e com isso será perdida a oportunidade de participar ativamente na solução dos problemas reais do mundo."

Longe de renegar o passado, achamos que, no prazer de um estudo que satisfaz, é possível e provável que os mais dotados encontrem motivação para retomar seu legado e dar-lhe continuidade.

É necessário, antes de tudo, que, voltados para os fundamentos, busquemos as raízes da Geometria no passado e no presente a fim de poder estudar as possíveis projeções neste futuro que nos pressiona.

Os termos utilizados serão definidos diretamente ou indiretamente ao longo do trabalho.

FUNDAMENTAÇÃO AXIOMÁTICA

O mundo exterior desafia continuamente a curiosidade inata do homem. Como se processa a nossa percepção? Nós sentimos a realidade exterior subjetivamente, numa forma mais ou menos reduzida, isto é, esquematicamente.

Relataremos aqui uma situação narrada por GONSETH(3), em forma livre, que ajudará a esclarecer o conceito expresso e outros.

Alguns amigos resolvem dar um passeio atravessando um bosque para chegar a um hotel agradável no outro lado. O acaso os leva a uma clareira onde está uma enorme bola abandonada. Os amigos resolvem levá-la fazendo-a rolar. Logo descobrem que a mesma não pode passar por qualquer atalho. Muitas vezes a distância entre as árvores não dá passagem para o bola. Dão-se conta então que é necessário proceder com método para poder levá-la. Deixam-na no lugar e se dirigem ao hotel de onde voltam com uma folha de papel, uma fita métrica, lápis e tesouras. Preparam então um mapa da situação respeitando as regras seguintes:

1. Representam cada árvore com um ponto numerado no mapa e incidem sobre cada árvore o numero correspondente.
2. Unem dois pontos numerados com um segmento se a distância entre as árvores correspondentes é menor do que o diâmetro da bola, dando-se conta a seguir que não há necessidade de se preocupar com a escala exata.
3. Representam a bola com uma cruz.

.erminado o levantamento e, de posse do mapa, cortam os segmentos desenhados.

Supondo que o mapa tenha a forma da Figura 1, notamos que a parte de papel que contém a bola possui trajetos do contorno;o projeto é realizável, para isso sendo suficiente seguir um dos itinerários possíveis. Se a parte do mapa que contém a bola ficasse separada do contorno, não haveria solução.

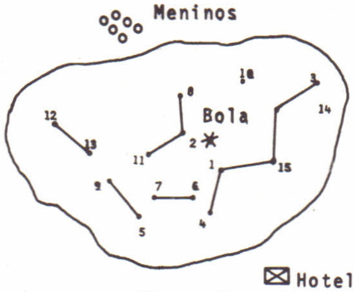

Figura 1.

O mapa é um esquema do bosque. Este é a realidade exterior ao esquema.

Foi estabelecida uma correspondência entre o bosque e o mapa representando:

a. elementos da realidade exterior com símbolos:

árvores numeradas ⟶ pontos numerados

bola ⟶ cruz

b. relações (no caso uma) na realidade exterior mediante relações entre os símbolos:

duas árvores cuja distância é menor do que o diâmetro da bola, com dois pontos ligados por um segmento.

O esquema foi elaborado em vista do objetivo proposto: tirar a bola do bosque. Se o objetivo fosse o de estudar a natureza das árvores, outro seria o tipo do esquema.

O esquema deve ser sumário. Se no esquema do exemplo anterior, colocássemos dados referentes às características das árvores, reduzíssemos as distâncias numa mesma escala, não estaríamos aumentando a eficácia do esquema na consecução do objetivo (detalhes desnecessários, via de regra, atrapalham), e, nem por isso, poderíamos identificar o esquema com a realidade exterior.

O esquema, uma vez elaborado, adquire uma certa autonomia em relação à realidade que o motivou pois, esquecida esta, com um pouco de imaginação, podemos atribuir ao mesmo, interpretações diferentes. Voltando ao mapa do exemplo considerado, podemos pensar, por exemplo, a cruz como uma ilha e os segmentos como bancos de areia ou outro tipo de obstáculos para um navio que tenha que chegar à ilha.

Denominamos modelo a toda concretização de um esquema. A realidade exterior também é modelo em relação ao seu esquema.

Resumindo:

a. O esquema deve atender ao(s) objetivos(s) proposto(s).

b. O esquema deve ser sumário.

c. O esquema é autônomo em relação à realidade exterior que o motivou.

d. O esquema não deve ser identificado com a realidade exterior.

e. O esquema deve ser eficaz na consecução do(s) objetivo(s) proposto(s).

No exemplo considerado, o esquema era representado por um mapa. Esquema não é necessariamente um mapa ou um gráfico. Podemos chamar de esquema a toda representação de uma situação problemática onde se salientam alguns elementos entre os quais existem ou são impostas certas relações com objetivos a serem alcançados e que satisfazem às condições há pouco resumidas.

Dando um sentido mais largo aos termos até aqui utilizados, podemos descrever desta forma, por exemplo, as passagens sucessivas de elaboração e de interpretação de uma obra literária: a realidade exterior é o pensamento, a inspiração, do autor; o esquema concretiza-se na elaboração do texto; o modelo é criado pelo leitor ao interpretar o texto. O pintor concretiza, numa tela, sua inspiração. Cada um de nós sente subjetivamente o que vê e, ao interpretá-lo, cria um modelo.

Analisando todo tipo de conhecimento humano ,sob o aspecto considerado, podemos descobrir que ele se enicia mediante um conhecimento esquemático.

FASES DO TRABALHO INTELECTUAL, SOB O PONTO DE VISTA DO CONHECIMENTO ESQUEMÁTICO

Todo trabalho intelectual é uma resposta a uma pergunta, a um problema. De início, é feita uma análise para que se possam levantar os aspectos relevantes, seus elementos e as relações entre os mesmos, reduzindo o todo a um esquema. A seguir, num processo de abstração, parte-se do esquema esquecendo a realidade exterior que o motivou e os possíveis modelos. Aplicando-se as regras da dedução lógica aos símbolos e às relações entre os mesmos estabelecidas, procura-se o maior número possível de resultados relacionados com o(s) objetivo(s) proposto(s). É a fase de elaboração da teoria. Finalmente, comparando os resultados teóricos com a observação prática na realidade exterior e nos modelos, verificamos a eficácia da mesma.

Resumindo, distinguimos três fases:

a. O uso da intuição e da experiência para a elaboração de um esquema eficaz em relação aos objetivos propostos.
b. O uso da dedução lógica para enriquecer a teoria e controlar sua coerência no esquema dado.
c. A verificação de que a teoria é adequada ao conhecimento empírico e sensível, da realidade exterior e à aplicação dos resultados teóricos àquele e a outros modelos.

Não pode haver interferência nas três fases. Ao longo da dedução, deve-se absolutamente evitar recorrer à intuição ou à experiência. Se por acaso ocorrer um impasse na segunda fase, faz-se necessário voltar à primeira e melhorar o esquema. Se o impasse ocorrer na terceira fase, volta-se à segunda para verificar se não há erros de dedução. Não encontrando nenhum, volta-se novamente à primeira, isto é, ao esquema, que deve ser correto.

Tomando a Física como exemplo, poderíamos expressar as três fases da forma seguinte:

a. Fase experimental: estudo do problema, formulação da hipótese.
b. Dedução lógica de todas as possíveis consequências da hipótese.
c. Verificação prática dos resultados teóricos para julgar o valor da teoria elaborada.

Num labor de ida e volta entre a prática e a teoria, alargam-se e enriquecem-se os horizontes da realidade consciente.

Toda disciplina intelectual que procede da forma descrita, é uma ciência axiomatizada. Os símbolos introduzidos no esquema são os elementos ou as noções fundamentais da ciência. As relações introduzidas entre os símbolos podem ser chamadas de axiomas.

Axioma é uma propriedade atribuída aos elementos fundamentais e o conjunto dos axiomas aceitos constitui a base axiomática da ciência em estudo.

UMA CONCEPÇÃO DE MATEMÁTICA ELEMENTAR

Historicamente falando, a Geometria foi a primeira ciência a alcançar alto grau de axiomatização. Outras ciências axiomatizadas são hoje extraordinariamente desenvolvidas, como, por exemplo, a Aritmética, a Álgebra, a Lógica. Por outro lado, a Química, as Ciências Naturais, a Economia, por exemplo, apesar da introdução de métodos científicos a fim de melhorar a sistematização de seus conteúdos e o planejamento de seu desenvolvimneto, não atingiram ainda um nível suficiente para uma axiomatização, se é que a mesma seja realizável.

A Geometria primitiva nasceu da observação, como se fosse um primeiro capítulo da Física, dedicada a um particular tipo de fenômenos, ditos geométricos. Suas figuras são objetos cuja matéria está reduzida ao mínimo.

As figuras mais simples são:

- o ponto, com o qual podemos representar uma estrela;
- a reta, com a qual podemos representar um raio luminoso;
- o plano, com o qual podemos representar a superfície de um lago de águas paradas.

Nas figuras, o geômetra observa algumas relações, que, quando consideradas verdadeiras (evidentes), chama de axiomas.

A intuição sugere que as figuras possuem outras propriedades mais complexas, que podem ser verificadas sobre algumas figuras, grosseiramente, não podendo o observador certificar-se nem de sua generalidade nem dos seus limites. Impõe-se a necessidade de uma dedução lógica em processos que vão se diversificando e refinando com o passar do tempo. Uma propriedade deste tipo, não considerada evidente, recebe o nome de teorema e, depois de deduzida em forma convincente, adquire o valor de um axioma.

Resumindo:

Axiomas são verdades (relações) evidentes por si mesmas (Compare esta definição com a que foi dada anteriormente).

Teoremas são verdades não evidentes, mas demonstráveis.

As figuras geométricas e suas relações constituem a Geometria, imagem (esquemática) do mundo físico.

Este é o sentido da Geometria na sua primeira colocação, o sentido de suas abstrações, a escolha de seus axiomas e o valor de suas aquisições.

Organizada pela primeira vez nos "Elementos" de Euclides, a Geometria sofreu, no decorrer dos tempos, críticas e reformulações. Enriqueceu-se em detalhes, o que não é de se estranhar. Admira-se constatar quanto desta obra permanece válido ainda em nossos dias.

Geometria, Hoje

Em tempos bem mais recentes, a análise e o conhecimento mais profundo das estruturas da Matemática levam-nos a ver a Geometria como uma construção de pensamento puro onde os elementos, chamados ponto, reta e plano, são idéias aceitas sem definição e onde os axiomas têm a função de fornecer as relações básicas a partir das quais se inicia o processo de dedução.

Por conveniência didática, ao iniciar-se o estudo da Geometria (o mesmo vale para qualquer parte da Matemática) são dados:

a. os elementos primitivos, isto é, idéias aceitas sem definição, e que, na Geometria, são o ponto, a reta e o plano;

b. os axiomas, proposições que expressam propriedades atribuídas aos elementos e que devem ser literalmente interpretados.

Por que, idéias aceitas sem definição?

Se considerarmos que uma definição é uma introdução de um ente novo, de uma palavra nova, por intermédio de outras já conhecidas, entendemos que tal seqüência deve ter um início. Se encontrarmos uma palavra desconhecida, podemos recorrer ao vocabulário onde acharemos a definição de todas as palavras. Cada palavra é definida mediante outras que, por sua vez, são definidas mediante outras, e assim por diante, num processo que não tem fim. O vocabulário tanto na escrita como na fala será o veículo em nossa comunicação se conhecermos certo número de palavras e algumas regras de composição das mesmas. Da mesma forma, se quisermos nos orientar no mapa de uma cidade, precisamos ter um ponto de referência convencional, por exemplo, uma praça, um monumento, um indicador,..., para nos localizar.

Há necessidade de pontos de referência no início do estudo da Geometria que são as idéias de ponto, reta e plano, dados sem definição e, portanto, chamados de "elementos primitivos". A natureza dos elementos, na verdade, não nos interessa. O que nos importa é o comportamento dos mesmos. Por essa razão tratamos estes elementos como símbolos, idéias e não objetos, o que não nos impede, toda vez que acharmos conveniente, dar a eles uma representação, criando um modelo.

Um atento exame das duas condições, a. e b. acima, revela que as mesmas não são independentes pois a segunda compreende a primeira. De fato, se, como já vimos, não interessa a natureza dos elementos mas somente o seu relacionamento, poderíamos dar uma definição na forma seguinte: chamamos ponto, reta e plano aos entes que satisfazem às propriedades expressas pelos axiomas seguintes... Na verdade, os axiomas escolhidos dão uma definição implícita dos entes aos quais nos referimos.

Os axiomas constituem uma convenção entre o autor (criador) e o leitor. O primeiro pede ao segundo que os aceite* e, como compensação, lhe apresentará a obra que pode construir com aquelas premissas.

---

*O termo "postulado", que é usado como sinônimo de axioma, deriva do verbo "postulare" que, em latim, significa "pedir".

"Verdadeira" é num sistema axiomático, uma proposição, conseqüência lógica dos axiomas aceitos. "Falsa", se estiver em contradição com os mesmos.

Depois destas considerações nos parecerá bem clara a curiosa definição de Matemática atribuída a BERTRAND RUSSEL: "A Matemática é uma ciência na qual não se sabe de que se fala e não se sabe se as afirmações que se fazem são verdadeiras ou falsas".

Nessa colocação, pode parecer que o conjunto de axiomas dados como base de uma Geometria e que indicaremos com A, é livremente escolhido. Na verdade impõem-se algumas limitações.

Em princípio, os axiomas de A devem satisfazer à condição essencial de serem "compatíveis*".

Outras condições "convenientes" para um conjunto de axiomas damos a seguir:

1. O "número" - Os axiomas devem ser tão numerosos quanto forem necessários para que a base seja eficaz.
2. Cada axioma deve conter uma "única afirmação" (é um cuidado estético).
3. Um axioma não deve conter afirmações já contidas, implícita ou explicitamente, em outros de A (é o princípio da "independência" axiomática).

A observância ou não destas últimas três condições não altera o valor da teoria, apesar de que a estrutura teórica aparece claramente somente se todas as condições são satisfeitas.

Na prática por considerações didáticas, não nos preocupamos com estas últimas condições toda vez que obtivermos em troca, simplicidade na exposição e clareza nos pensamentos.

Considerando os axiomas A e a teoria deles deduzida, obteremos um *sistema* que tem sido chamado de *hipotético-dedutivo* e que indicaremos com A'. Se chamarmos os elementos do sistema de *ponto*, *reta* e *plano*, o sistema A' é uma *Geometria*. Não é necessário que o ponto, a reta e o plano tenham sentido que vulgarmente lhes é atribuído. Para exemplificar, consideremos o seguinte modelo: tomemos uma esfera E e, sobre a mesma, definamos como *ponto*, a um par de pontos diametralmente opostos, chamemos de *reta* aos círculos máximos de E,

*"P" e "não P" são afirmações imcompatíveis se se referem ao mesmo ente. A questão da compatibilidade das premissas era irrelevante para Euclides pois, se uma proposição é verdadeira, deve ser compatível com outras também verdadeiras. Diferente é agora o nosso caso no qual propomos partir de premissas não necessariamente verificáveis.

plano à superfície da esfera. Feitas estas convenções, podemos propor as proposições seguintes como axiomas: "por dois *pontos* passa uma *reta* e somente uma"; ainda, "se uma *reta* possui dois *pontos* em comum com um *plano*, pertence ao *plano*". Sobre E não existe paralelismo pois duas *retas* possuem sempre um *ponto* em comum; a *Geometria* obtida não é euclidiana, pois não vale o postulado das paralelas.*

CONCLUSÃO

Das considerações feitas resultará claramente que organizar Geometria num sistema hipotético-dedutivo não admite uma solução única, havendo alternativas na escolha dos conceitos primitivos e nos axiomas que os inter-relacionam. Como conseqüência haverá um problema em aberto.

A Geometria a ser estudada nas escolas de I° e II° graus, que chamaremos de Geometria Elementar deve ser uma interpretação matemática da natureza. O conhecimento da natureza evolui com o desenvolvimento das ciências. Portanto a Geometria elementar nunca terá uma conotação definitiva, mas em qualquer caso deve obedecer ao rigor matemático, implícita ou explicitamente.

É de nosso parecer que agora e nos próximos anos deve a Geometria elementar ser uma Geometria euclidiana. Não excluímos, porém, a idéia de que num futuro possa ser conveniente um outro tipo de Geometria. O que mais importa é a aquisição do método matemático, o que independe dos particulares sistemas de axiomas considerados. É necessário ainda equacionar os objetivos formativos com os propedêuticos e os operacionais levando em conta o desenvolvimento intelectual natural do educando.

Proposta uma geometria elementar em forma matematicamente rigorosa e tão simples quanto possível, devemos lembrar que sua iniciação deva ser feita num enfoque intuitivo, adequado ao local e à clientela. A estrutura de seu desenvolvimento, clara ao mestre, deve ficar subjacente ao aluno até que este, atingida a maturidade suficiente e um conveniente avanço nos estudos, venha a descobri-la.

BIBLIOGRAFIA CITADA

1. CONFORTO, F. Postulati della geometria euclidea e geometria non euclidea. *In: Repertorio di matematiche,* aos cuidados de VILLA, M., Cedam, Padova, 2. ed. 1971.
2. CAMPEDELLI, L. Sulla struttura logica della geometria. *In:Matematica moderna.* Pàtron, Bologna, 1966.

*A Geometria é dita euclidiana quando aceita o postulado das paralelas que pode ser enunciado na forma seguinte: por um ponto exterior a uma reta passa uma, e somente uma, paralela à reta dada.

3. GONSETH, F. *Leitfaden der Planimetrie.* Zurich, Orell Füssli, 1933.

4. MORIN, U. Geometria elementare. *In: Matematica moderna.* Pàtron, Bologna, 1966.

5. SUTER, H. *Mathématiques modernes II.* Neuchâtel, Editions du Griffon, 1966.

Recebido em junho, 1979; aceito em agosto, 1979.