Artigo Original DOI:10.5902/2179460X21418

Ciência e Natura, Santa Maria v.39 n.1, 2017, Jan - abr, p. 74 – 83
Revista do Centro de Ciências Naturais e Exatas - UFSM
ISSN impressa: 0100-8307 ISSN on-line: 2179-460X

CIÊNCIAeNATURA

Existência e multiplicidade de soluções para uma equação elítica quaselinear do tipo Kirchhoff

Existence and multiplicity of solutions for a quasilinear elliptic equation of Kirchhoff type

Francisco Helmuth Soares Dias[1] e Márcio Luís Miotto[2]

[1]Universidade Federal do Rio Grande do Sul, RS, Brasil
kxchico@yahoo.com.br

[2]Universidade Federal de Santa Maria, RS, Brasil
miottomatica@gmail.com

Resumo

O objetivo deste trabalho é apresentar condições suficientes para a existência e multiplicidade de soluções da seguinte classe de problemas do tipo Kirchhoff:

$$\begin{cases} -\left(a+b\|u\|^{p}\right)^{p-1}\Delta_p u = h(x)|u|^q + f(x,u), \; x\in\Omega, \\ 0 \lneq u \in W_0^{1,p}(\Omega), \end{cases}$$

onde $a, b > 0$ são constantes, $\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ é o operador $p-$Laplaciano com $p > 1$, Ω é um domínio limitado suave em $\mathbb{R}^N$, onde $1 < q+1 < p < N < \frac{p^2}{p-1}$ e as funções $h(x)$ e $f(x,s)$ satisfazem condições apropriadas. Utilizaremos neste propósito argumentos variacionais, tais como o Teorema do Passo da Montanha e o Princípio Variacional de Ekeland.

Palavras-chave: *Equação de Kirchhoff, $p-$Laplaciano, métodos variacionais, multiplicidade de soluções.*

Resumo

The aim of this work is to give some sufficient conditions for the existence and multiplicity of the solutions for the following class of Kirchhoff type problems:

$$\begin{cases} -\left(a+b\|u\|^{p}\right)^{p-1}\Delta_p u = h(x)|u|^q + f(x,u), \; x\in\Omega, \\ 0 \lneq u \in W_0^{1,p}(\Omega), \end{cases}$$

where $a, b > 0$ are constants, $\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ is the $p-$Laplacian operator with $p > 1$, Ω is a bounded smooth domain in $\mathbb{R}^N$, with $1 < q+1 < p < N < \frac{p^2}{p-1}$ and the functions $h(x)$ and $f(x,s)$ satisfy appropriate conditions. We will use for this purpose variational arguments, such as Mountain Pass Theorem and the Ekeland Variational Principle.

Keywords: *Kirchhoff Equation, $p-$Laplacian, variational methods, multiplicity of solutions.*

Recebido: 15/03/2015 Aceito: 27/10/2016

1 Introdução

O problema clássico de Kirchhoff

$$\begin{cases} -M\|u\|^2\Delta u = f(x,u), \ x \in \Omega, \\ u = 0, \ x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

onde $M : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ é uma função contínua, é a versão estacionária da equação

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{P_0}{h} + \frac{E}{2L}\int_0^L \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \tag{2}$$

proposta por Kirchhoff (1883), a qual é uma generalização da conhecida equação de corda vibrante de D'Alembert. O modelo descrito em (2) leva em conta as mudanças no comprimento da corda produzida por vibrações transversais, sendo L o comprimento da corda, h a área da seção transversal, E o módulo de Young do material, ρ a densidade da massa e P_0 a tensão inicial. Relacionado com (1), Perera e Zhang (2006) abordaram o problema:

$$\begin{cases} -(a + b\|u\|^2)\Delta u = g(x,u), \ x \in \Omega, \\ u = 0, \ x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{3}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado suave, $N \geq 1$ e $a, b > 0$. A função $g(x,t)$ é localmente Lipschitz contínua em $t \in \mathbb{R}$, uniformemente contínua em $x \in \overline{\Omega}$ e subcrítica: $|g(x,t)| \leq C(|t|^{p-1} + 1)$, para algum $2 < p < 2^*$, onde C é uma constante positiva. Eles obtiveram via métodos variacionais a existência de uma solução positiva, uma solução negativa e uma solução mudando de sinal para o problema (3).

Por sua vez, Liang et al. (2013) via o argumento do grau topológico e métodos variacionais obtiveram a existência de soluções positivas para o problema:

$$\begin{cases} -(a + b\|u\|^2)\Delta u = \tau f(x,u), \ x \in \Omega, \\ u = 0, \ x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{4}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado suave, $N = 1$, 2 ou 3, $a, b \geq 0$, com $a + b > 0$, τ é um parâmetro positivo e $f(x,t)$ é uma função contínua que é assintoticamente linear em zero e assintoticamente $3-$linear no infinito, com relação a t.

Destacamos também, o importante trabalho de Li et al. (2002), que através do Princípio Variacional de Ekeland e do Teorema do Passo da Montanha, provaram a existência e multiplicidade de soluções positivas para a seguinte classe de problemas elíticos:

$$\begin{cases} -\Delta u = h(x)u^q + f(x,u), \quad x \in \Omega, \\ 0 \leq u \in W_0^{1,p}(\Omega), \end{cases} \tag{5}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado suave, $N \geq 1$, $0 < q < 1$, $h \in L^\infty(\Omega)$, $h(x) \not\equiv 0$, e a função $f(x,s)$ contempla os casos de crescimento assintoticamente linear e superlinear com relação a variável s no infinito e o caso linear em s.

Mencionamos ainda o trabalho de Corrêa e Figueiredo (2006) o qual obteve resultados de existência de soluções para o problema

$$\begin{cases} -[M(\|u\|^p)]^{p-1}\Delta_p u = f(x,u) + \lambda|u|^{s-2}u, \quad x \in \Omega, \\ u = 0, \ x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{6}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado suave, $1 < p < N$, $s \geq p^*$, $\lambda \geq 0$, e M e $f(x,t)$ satisfazem certas propriedades. Recentemente Guo e Nie (2015) obtiveram, sob certas condições, resultados de existência de infinitas soluções para a seguinte equação

$$\begin{cases} -\left(a + b\|u\|^p\right)^{p-1}\Delta_p u + \lambda V(x)|u|^{p-2}u = f(x,u), \\ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{7}$$

onde $p \geq 2$, $N < \dfrac{p^2}{p-1}$, $a > 0, b \geq 0$ são constantes, λ é um parâmetro e $V(x)$ é uma função potencial.

Citamos ainda dentre outros, os trabalhos de Alves et al. (2005), Dai (2009), Dai e Liu (2009), Dai e Wei (2010), Alves et al. (2010), Miotto (2010), Cammaroto e Vilasi (2011), Colasuonno e Pucci (2011),Sun e Tang (2011), Pei (2012), Huang et al. (2013), Hssini et al. (2013), Ferrara et al. (2014), Miotto (2014) e Hssini et al. (2015) os quais utilizam argumentos variacionais.

No presente trabalho, fazendo o uso de métodos variacionais, apresentamos resultados de existência e multiplicidade de soluções fracas não negativas da seguinte classe de problemas do tipo Kirchhoff:

$$\begin{cases} -\left(a+b\|u\|^{p}\right)^{p-1}\Delta_p u = h(x)|u|^q + f(x,u), \\ 0 \lneq u \in W_0^{1,p}(\Omega), \end{cases} \tag{8}$$

onde $a,b > 0$ são constantes, $\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ é o operador $p-$Laplaciano com $p > 1$, Ω é um domínio limitado suave em $\mathbb{R}^N$, com os expoentes $1 < q+1 < p$, $p < N < \frac{p^2}{p-1}$ e as funções $h(x)$ e $f(x,s)$ satisfazem as seguintes hipóteses:
(**h1**) $h \in L^\infty(\Omega)$ e $h(x) > 0$ em $\Omega_0 \subset \Omega$;
(**f1**) $f(x,s) \in C(\overline{\Omega} \times [0,\infty))$, $f(x,0) = 0$;
(**f2**) $\lim\limits_{s\to 0^+} \dfrac{f(x,s)}{\lambda_1 (as)^{p-1}} = \alpha$, $\lim\limits_{s\to\infty} \dfrac{f(x,s)}{\mu_1 b^{p-1} s^{p^2-1}} = \beta$, $q.t.p.\ x \in \Omega$ com $0 \leq \alpha < 1 < \beta < \infty$ e

$$\lambda_1 = \inf\left\{\frac{\|u\|^p}{\|u\|_p^p}; u \in W_0^{1,p}(\Omega), u \not\equiv 0\right\} > 0,$$

Sob tais condições obtemos o seguinte resultado de existência:

Teorema 1.1. *Suponhamos que as condições $(h1)$, $(f1)$ e $(f2)$ sejam válidas. Então existe uma constante $\Lambda > 0$ tal que se $\|h\|_\infty < \Lambda$, o problema (8) possui ao menos uma solução $u_1 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, com $u_1 \gneq 0$. Além disso, se $h(x) \geq 0$, então u_1 é positiva $q.t.p.$ em Ω.*

Além disso, se supormos que é válida a seguinte condição:
(**f3**) Existem $C, r > 0$ de modo que

$$p^2 F(x,s) - f(x,s)s \leq Cs^p,$$

$q.t.p.\ x \in \Omega$ se $s \geq r$, onde $F(x,s) = \int_0^s f(x,t)\,dt$.

Então obtemos o seguinte resultado a respeito da multiplicidade de soluções de (8):

Teorema 1.2. *Suponhamos válidas as condições $(h1)$, $(f1)$, $(f2)$, $(f3)$ com $\|h\|_\infty < \Lambda$. Então o problema (8) admite uma segunda solução não negativa $u_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Além disso, $u_2 > 0$ $q.t.p.$ em Ω, se $h(x) \geq 0$.*

Este artigo está organizado da seguinte forma: na primeira seção, exploramos alguns resultados preliminares para este trabalho. Na seção seguinte, através do Princípio Variacional de Ekeland justificamos o Teorema 1.1. Ainda na referida seção, por meio do Teorema do Passo da Montanha faremos a demostração do Teorema 1.2.

2 Resultados Preliminares

Iniciamos essa seção apresentando algumas convenções. Temos que o expoente crítico de Sobolev é dado por $p^* = \dfrac{Np}{N-p}$. Como de costume, denotaremos a norma do espaço de Lebesgue $L^r(\Omega)$ por

$$\|u\|_r^r \doteq \int_\Omega |\,u|^r\,dx, \text{ se } 1 \leq r < \infty,$$

$$\|u\|_\infty \doteq ess \sup_\Omega |u|.$$

Definimos o espaço de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $C_c^\infty(\Omega)$ em $W^{1,p}(\Omega)$, com respeito a norma

$$\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

Dizemos que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ é uma solução fraca para o problema (8), se u satisfaz a equação

$$(a+b\|u\|^p)^{p-1}\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\varphi\,dx = \int_\Omega h(x)|u|^{q-1}u\varphi\,dx + \int_\Omega f(x,u_+)\varphi\,dx,$$

para toda função $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, onde $u_+ = \max\{0,u\}$.

A ideia principal dos métodos variacionais é relacionar a existência de solução de uma equação à existência de um ponto crítico de um funcional associado a equação. Associamos então, ao problema (8) o funcional $I : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$, definido por

$$I(u) \;=\; \frac{1}{bp^2}(a+b\|u\|^p)^p - \frac{1}{q+1}\int_\Omega h(x)|u|^{q+1}\,dx - \int_\Omega F(x,u_+)\,dx,$$

onde $F(x,t) = \int_0^t f(x,s)\,ds$.

Através das hipóteses $(h1)$, $(f1)$ e $(f2)$, mostra-se que $I \in C^1(W_0^{1,p}(\Omega),\mathbb{R})$ e apresenta derivada $I'(u)$ em cada $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ dada por

$$\langle I'(u),\varphi\rangle \;=\; (a+b\|u\|^p)^{p-1}\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\varphi\,dx - \int_\Omega h(x)|u|^{q-1}u\varphi\,dx - \int_\Omega f(x,u_+)\varphi\,dx,$$

para cada $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Como por definição temos que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ é um ponto crítico do funcional I caso $I'(u) = 0$ em $(W_0^{1,p}(\Omega))^*$, temos que os pontos críticos de I são soluções fracas de (8).

Abaixo, citamos alguns fatos relevantes para o estudo do problema (8).

Observação 2.1. ***(i)*** *Consideremos $c \in \mathbb{R}$. Uma sequência $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $I(u_n) = c + o(1)$ e $I'(u_n) = o(1)$ em $W_0^{-1,p'}(\Omega)$ é dita ser uma sequência $(PS)_c$ para o funcional I. Se qualquer sequência $(PS)_c$ para o funcional I, possui uma subsequência convergente, então dizemos que I satisfaz a condição (PS) de nível c.*

(ii) *Se (u_n) é uma sequência $(PS)_c$ limitada para o funcional I, então (u_{n_+}) também é sequência $(PS)_c$ para o funcional I. Com efeito, sendo (u_n) uma sequência $(PS)_c$ para o funcional I, então para cada $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$*

$$\langle I'(u_n),\varphi\rangle = o(1),$$

Tomando $\varphi = u_{n_-}$ na igualdade acima, decorre que

$$(a+b\|u_n\|^p)^p\|u_{n_-}\|^p - \int_\Omega f(x,u_{n_+})u_{n_-}\,dx = o(1),$$

e usando o fato de que $\int_\Omega f(x,u_{n_+})u_{n_-}\,dx = 0$, obtemos que

$$\|u_{n_-}\| = o(1).$$

Logo,

$$\begin{aligned} I(u_n) - I(u_{n_+}) \;&=\; \frac{1}{bp^2}[(a+\|u_n\|^p)^p - (a+\|u_{n_+}\|^p)^p \\ &=\; o(1). \end{aligned}$$

Por sua vez, como (u_n) é limitada e $\|u_n\| = \|u_{n_+}\| + o(1)$, temos toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$

$$\begin{aligned} & < I'(u_n) - I'(u_{n_+}),\varphi > \\ =\; & [(a+b\|u_n\|^p)^{p-1} - (a+b\|u_{n_+}\|^p)^{p-1}] \\ & \times \int_\Omega |\nabla u_{n_+}|^{p-2}\nabla u_{n_+}\nabla\varphi\,dx + (a+b\|u_n\|^p)^{p-1}\int_\Omega |\nabla u_{n_-}|^{p-2}\nabla u_{n_-}\nabla\varphi\,dx \\ =\; & o(1), \end{aligned}$$

donde segue que (u_{n_+}) também é uma sequência $(PS)_c$ para o funcional I.

A seguir, aprentamos uma condição para a validade da condição (PS) em um certo nível c.

Lema 2.1. *Suponhamos válidas as condições $(h1)$, $(f1)$ e $(f2)$ e que $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ é uma sequência $(PS)_c$ limitada para o funcional I. Então (u_n) possui uma subsequência convergente em $W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Demonstração: Seja (u_n) uma sequencia $(PS)_c$ limitada para o funcional I, com $u_n \geq 0$. Então, passando a uma subsequência se necessário, podemos supor que

$$\|u_n\|^p \to c_0,$$

e que existe $0 \leq u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, de modo que $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Pelas condições $(h1)$, $(f1)$ e $(f2)$, as imersões de Sobolev e o Teorema da Convergência Dominada, segue que

$$\int_\Omega f(x,u_n)u\, dx = \int_\Omega f(x,u)u\, dx + o(1), \tag{9}$$

$$\int_\Omega f(x,u_n)u_n\, dx = \int_\Omega f(x,u)u\, dx + o(1), \tag{10}$$

$$\begin{aligned}\int_\Omega h(x)|u_n|^{q-1}u_n u\, dx &= \int_\Omega h(x)|u_n|^{q+1}\, dx + o(1)\\ &= \int_\Omega h(x)|u|^{q+1}\, dx + o(1).\end{aligned} \tag{11}$$

Assim, se considerarmos

$$\begin{aligned} c_n \quad = \quad & < I'(u_n), u_n > + \int_\Omega h(x)|u_n|^{q+1}\, dx + \int_\Omega f(x,u_n)u\, dx - < I'(u_n), u > \\ & - \int_\Omega h(x)|u_n|^{q-1}u_n u\, dx - \int_\Omega f(x,u_n)u\, dx, \end{aligned}$$

segue das relações (9), (10), (11) e do fato que (u_n) é sequencia $(PS)_c$ para o funcional I, que $c_n = o(1)$. Por outro lado,

$$c_n = (a + b\|u_n\|^p)^{p-1} \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n(\nabla u_n - \nabla u)\, dx.$$

Agora pelo fato que $\|u_n\|^p \to c_0$ e $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, segue que

$$(a + b\|u_n\|^p)^{p-1} \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u(\nabla u_n - \nabla u)\, dx = o(1).$$

Assim,pelas relações acima, sendo $\ll \cdot,\cdot \gg$ o produto interno euclidiano em $\mathbb{R}^N$, temos que

$$(a + b\|u_n\|^p)^{p-1} \int_\Omega \ll |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u, \nabla u_n - \nabla u \gg\, dx = o(1). \tag{12}$$

Agora usando o fato que existe $C = C(p) > 0$ de modo que para todo $x,y \in \mathbb{R}^N$, temos se $p \geq 2$ ou $1 < p < 2$ respectivamente que,

$$\ll |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, y - y \gg \geq C|x-y|^p,$$

$$\ll |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, y - y \gg \geq C\frac{|x-y|^2}{(|x|+|y|)^{2-p}},$$

obtemos por $\|u_n\|^p \to c_0$ e a relação (12) que existe $C > 0$ onde

$$(a + bc_0^p)^{p-1}C\|u_n - u\|^p = o(1),$$

donde segue que $u_n \to u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, o que finaliza a justificativa.

□

Enunciamos agora dois resultados clássicos da teoria dos pontos críticos, a saber, o Princípio Variacional de Ekeland e o Teorema do Passo da Montanha. Começamos pelo Princípio Variacional de Ekeland, cuja demonstração pode ser encontrada em de Figueiredo (1989).

Teorema 2.1 (Princípio Variacional de Ekeland). *Seja (X,d) um espaço métrico completo e $\phi : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ um funcional de classe C^1 e limitado inferiormente. Então se*

$$c = \inf_{u \in X} \phi(u) < \inf_{u \in \partial X} \phi(u),$$

existe uma sequência (u_n) em X satisfazendo a condição $(PS)_c$.

O próximo resultado é o Teorema do Passo da Montanha que pode ser encontrado em Schechter (1991).

Teorema 2.2 (Teorema do Passo da Montanha). *Seja X um espaço de Banach real e $\phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1 satisfazendo:*

$$\max\{\phi(0),\phi(v)\} \leq \kappa < \nu \leq \inf_{\|u\|=r} \phi(u),$$

para algum $r > 0$ e $v \in X$ com $\|v\| > r$. Então, existe uma sequência (u_n) em X satisfazendo a condição $(PS)_c$, onde $c \geq \nu$ pode ser caracterizado por

$$c = \inf_{\sigma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} \phi(\sigma(t)),$$

onde

$$\Gamma = \{\sigma \in C([0,1],X); \sigma(0) = 0, \sigma(1) = v\}.$$

Com o objetivo de obter sequências $(PS)_c$ para o funcional I fazendo o uso dos resultados acima mencionados, vamos a seguir obter alguns resultados auxiliares sobre as funções $f(x,s)$ e $F(x,s)$ baseados nas condições $(f1)$ e $(f2)$. Pela hipótese $(f2)$, temos que dado $\varepsilon \in (0,1)$, existe $\delta > 0$ tal que para $s \in \mathbb{R} \cap (0,\delta)$ vale

$$\left| \frac{f(x,s)}{\lambda_1 (as)^{p-1}} - \alpha \right| < \varepsilon.$$

Logo, para $0 < s < \delta$, temos

$$(\alpha - \varepsilon)\lambda_1(as)^{p-1} < f(x,s) < (\alpha + \varepsilon)\lambda_1(as)^{p-1}. \tag{13}$$

Por outro lado, de $\lim\limits_{s \to \infty} \dfrac{f(x,s)}{b^{p-1}\mu_1 s^{p^2-1}} = \beta$, temos que existe $\delta_1 > \delta$, de modo que $0 < \delta_1 < s$, obtemos

$$\left| \frac{f(x,s)}{b^{p-1}\mu_1 s^{p^2-1}} - \beta \right| < \varepsilon,$$

e por conseguinte

$$(\beta - \varepsilon)b^{p-1}\mu_1 s^{p^2-1} < f(x,s) < (\beta + \varepsilon)b^{p-1}\mu_1 s^{p^2-1}. \tag{14}$$

Das desigualdades (13), (14) e como $f \in C(\overline{\Omega} \times [0,\infty))$, existe $C_\varepsilon > 0$ de modo que para todo $s \in [0,\infty)$

$$-C_\varepsilon s^{p-1} + (\beta - \varepsilon)b^{p-1}\mu_1 s^{p^2-1} < f(x,s) < (\alpha + \varepsilon)\lambda_1(as)^{p-1} + C_\varepsilon s^{p^2-1}. \tag{15}$$

Integrando em s a expressão acima, obtemos para $s \geq 0$,

$$-\frac{C_\varepsilon}{p} s^p + \frac{1}{p^2}(\beta - \varepsilon)b^{p-1}\mu_1 s^{p^2} < F(x,s) < \frac{1}{p}(\alpha + \varepsilon)a^{p-1}\lambda_1 s^p + \frac{C_\varepsilon}{p^2} s^{p^2}. \tag{16}$$

O próximo resultado será essencial para garantirmos as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha, bem como para a demonstração da existência de uma solução através do Princípio Variacional de Ekeland.

Lema 2.2. *Suponhamos que as condições $(h1)$,$(f1)$ e $(f2)$ sejam satisfeitas. Então existem $r,\gamma > 0$ e $\Lambda > 0$, $\Lambda = \Lambda(a,\alpha,p,q,f,N,\Omega)$, tal que para qualquer $h \in L^\infty(\Omega)$ com $\|h\|_\infty < \Lambda$ temos que*

$$I(u) \geq I(0) + \gamma,$$

para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, com $\|u\| = r$.

Além disso, existe $v_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ com $\|v_0\| > r$, tal que $I(v_0) < I(0)$.

Demonstração: Utilizando o fato que para todo $s,t \in [0,\infty)$, temos

$$(t+s)^p \geq t^p + s^p + pt^{p-1}s,$$

e a estimativa (16) e por fim as Imersões de Sobolev, obtemos que

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{bp^2}(a+b\|u\|^p)^p - \frac{1}{q+1}\int_\Omega h(x)|u|^{q+1}\,dx - \int_\Omega F(x,u_+)\,dx \\ &\geq \frac{a^p}{bp^2} + \frac{b^{p-1}}{p^2}\|u\|^{p^2} + \frac{a^{p-1}}{p}\|u\|^p - \frac{\|h\|_\infty}{q+1}\|u\|_{q+1}^{q+1} - (\alpha+\varepsilon)\frac{a^{p-1}}{p}\lambda_1\|u\|_p^p - \frac{C_\varepsilon}{p^2}\|u\|_{p^2}^{p^2} \\ &\geq I(0) + (1-\alpha-\varepsilon)\frac{a^{p-1}}{p}\|u\|^p - \frac{C_\varepsilon}{\mu_1 p^2}\|u\|^{p^2} - \frac{\|h\|_\infty C_q}{q+1}\|u\|^{q+1}, \end{aligned} \tag{17}$$

onde C_q é uma constante positiva de modo que

$$\|u\|_{q+1}^{q+1} \leq C_q\|u\|^{q+1}.$$

Devido a condição $(f2)$, como $\alpha < 1$, podemos escolher $\varepsilon > 0$ tal que $C_1 = (1-\alpha-\varepsilon)\frac{a^{p-1}}{p} > 0$. Sejam ainda $C_2 = \dfrac{C_q}{q+1} > 0$ e $C_3 = \dfrac{C_\varepsilon}{\mu_1 p^2} > 0$.

Consideremos para cada $t \geq 0$ a função

$$g(t) = C_2\|h\|_\infty t^{q+1-p} + C_3 t^{p^2-p}.$$

Como $0 < q < p-1$, temos que g possui mínimo global no ponto

$$r = C_4\|h\|_\infty^{\frac{1}{p^2-q-1}},$$

onde $C_4 = \left(\frac{C_2(p-q-1)}{C_3(p^2-p)}\right)^{\frac{1}{p^2-q-1}} > 0$ e então

$$g(r) = (C_2C_4^{q+1-p} + C_3C_4^{p^2-p})\|h\|_\infty^{\frac{p^2-p}{p^2-q-1}}.$$

Assim, existe uma constante $\Lambda = \Lambda(a,\alpha,q,p,f,N,\Omega) > 0$ tal que se $\|h\|_\infty < \Lambda$ então $g(r) < C_1$. Portanto, se $\|h\|_\infty < \Lambda$, segue pela desigualdade (17) que para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ com $\|u\| = r$ e $\gamma = (C_1 - g(r))r^p > 0$ que

$$I(u) \geq I(0) + \gamma.$$

Resta justificar que existe $v_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ de modo que $\|v_0\| > r$, tal que $I(v_0) < I(0)$. Para tanto, pelo fato de $\beta > 1$ existe $\varepsilon > 0$ de modo que $\mu_1 < (\beta - 2\varepsilon)\mu_1$. Assim pela definição de μ_1, existe $0 \lneq v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ de modo que

$$\|v\|^{p^2} < (\beta - 2\varepsilon)\mu_1\|v\|_{p^2}^{p^2}.$$

Assim, pela desigualdade (16), segue que

$$\begin{aligned} I(tv) &= \frac{1}{bp^2}(a+bt^p\|v\|^p)^p - \frac{t^{q+1}}{q+1}\int_\Omega h(x)v^{q+1}\,dx - \int_\Omega F(x,tv)dx \\ &\leq \frac{1}{bp^2}(a+b\|v\|^p)^p - t^{q+1}\frac{\|h\|_\infty}{q+1}\|v\|_{q+1}^{q+1}\,dx + t^p\frac{C_\varepsilon}{p}\|v\|_p^p - t^{p^2}\frac{1}{p^2}(\beta-\varepsilon)[b^{p-1}\mu_1\|v\|_{p^2}^{p^2}] \\ &\leq \frac{1}{p^2}\left(ab^{-\frac{1}{p}} + \left[b^{p-1}(\beta-2\varepsilon)\mu_1 t^{p^2}\|v\|_{p^2}^{p^2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)^p - \frac{t^{q+1}}{q+1}\int_\Omega h(x)v^{q+1}\,dx - \int_\Omega F(x,tv)dx \\ &\leq \frac{1}{p^2}\left(ab^{-\frac{1}{p}} + \left[b^{p-1}(\beta-2\varepsilon)\mu_1 t^{p^2}\|v\|_{p^2}^{p^2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)^p - t^{q+1}\frac{\|h\|_\infty}{q+1}\|v\|_{q+1}^{q+1} + t^p\frac{C_\varepsilon}{p}\|v\|_p^p - t^{p^2}\frac{1}{p^2}(\beta-\varepsilon)[b^{p-1}\mu_1\|v\|_{p^2}^{p^2}]. \end{aligned}$$

Portanto, pela desigualdade acima e o fato que $p < p^2$ e $\beta - 2\varepsilon < \beta - \varepsilon$, segue que

$$I(tv) \to -\infty$$

quando $t \to \infty$. Logo, existe $t_0 > 0$ suficientemente grande, onde se $v_0 = t_0 v$, temos que $v_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ com $\|v_0\| > r$ e tal que $I(v_0) < I(0)$.

3 Demostração dos resultados

Procedemos inicialmente a demonstração do Teorema 1.1, que nos garante a existência de uma solução para o problema (8).

Demonstração do Teorema 1.1: Para cada $R > 0$ consideramos

$$B_R = \left\{ u \in W_0^{1,p}(\Omega) : \|u\| \leq R \right\}.$$

Sejam $r > 0$ obtido no Lema 2.2. Como B_r é um conjunto fechado em $(W_0^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|)$, o qual é um espaço de Banach, decorre que $(B_r, \|\cdot\|)$ é também um espaço métrico completo. Novamente, pelo Lema 2.2, temos existe $\gamma > 0$ de modo que

$$I(u) \geq I(0) + \gamma, \ \forall u \in \partial B_r.$$

Ainda, note que por I ser um funcional contínuo em B_r, está bem definido o valor

$$c_1 = \inf\{I(u) : u \in B_r\}.$$

Observermos que pela definição de c_1 e a estimativa acima temos

$$c_1 \leq I(0) < I(0) + \gamma \leq \inf_{u \in \partial B_r} \phi(u). \tag{18}$$

Dado $h \in L^\infty(\Omega)$, consideremos $v \in C_c^\infty(\Omega_0)$, onde $v \not\leq 0$ e

$$\int_\Omega h(x) v^{q+1}\, dx > 0.$$

Então, pela relação (16), considerando $\varepsilon > 0$ de modo que $\beta - \varepsilon > 0$, segue que

$$\begin{aligned} I(tv) &= \frac{1}{bp^2}(a + bt^p\|v\|^p)^p - \frac{t^{q+1}}{q+1}\int_\Omega h(x)v^{q+1}\, dx - \int_\Omega F(x,tv)\, dx \\ &\leq I(0) + \frac{1}{bp^2}[(a + bt^p\|v\|^p)^p - a^p] - Ct^{q+1} + \frac{t^p C_\varepsilon}{p}\|u\|_p^p. \end{aligned}$$

Logo, para $t \to 0^+$ como $q + 1 < p$, obtemos $I(tv) < I(0)$. Mas para $t > 0$ de modo que $t\|v\| < r$, temos que $tv \in B_r$ o que implica pela definição de c_1 que

$$c_1 \leq I(tv) < I(0).$$

Portanto, pela relação (18) e pelo Princípio Variacional de Ekeland, temos que existe $(u_n) \subset B_r$ sequência $(PS)_{c_1}$ para o funcional I. Agora pelo fato que (u_n) ser limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$, pela Observação 2.1 podemos supor que $0 \leq u_n$. Em virtude do Lema 2.1 existem $0 \leq u_1 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que, a menos de subsequência, u_n converge fortemente para u_1 em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Assim, se $1 < q + 1 < p$, pela continuidade de I, obtemos $I(u_1) = c_1 < I(0)$, donde segue que $u_1 \gneq 0$ e pela continuidade da derivada I' temos $I'(u_1) = 0$, isto é, u_1 é um ponto crítico do funcional I e consequentemente uma solução fraca do problema (8).

Além disso, se considerarmos $h(x) \geq 0$, obtemos $\Delta_p u_1 \leq 0$. Logo, pelo Princípio do Máximo Forte (Vazquez, 1984) existem duas possibilidades, ou $u_1 > 0$ em Ω ou $u_1 \equiv 0$ $q.t.p.$ em Ω. Entretanto, como $I(u_1) = c_1 < I(0)$, segue que $u_1 > 0$ em Ω, o que prova o Teorema 1.1.

Vamos agora, através do Teorema do Passo da Montanha, garantir a existência de uma segunda solução não negativa, do problema (8).

Demonstração do Teorema 1.2: Sejam $r,\gamma,\Lambda > 0$ dados no Lema 2.2. Suponhamos que h satisfaz a condição $(h1)$ e $\|h\|_\infty < \Lambda$. Aplicando o Teorema do Passo da Montanha com $X = W_0^{1,p}(\Omega)$ e $\phi = I$ temos que para

$$c = \inf_{\sigma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\sigma(t)) \geq I(0) + \gamma,$$

existe uma sequência $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que (u_n) é uma sequência $(PS)_c$ para o funcional I.

Devemos mostrar que (u_n) é uma sequência convergente. Para tanto, pelo Lema 2.1, basta mostrar que (u_n) é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Suponhamos que isso não ocorra, isto é, $\|u_n\| \to \infty$, quando $n \to \infty$ e seja

$$w_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}.$$

Claramente, w_n é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$, pois $\|w_n\| = 1$. Logo podemos supor, a menos de subsequência, que existe $w_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ de modo que $w_n \rightharpoonup w_0$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, $w_n \to w_0$ em $L^r(\Omega)$, se $1 \le r < p^*$ e $w_n \to w_0$ q.t.p. em Ω.

Mostremos agora que $w_0 \equiv 0$ em Ω. Caso $w_0 \not\equiv 0$ em Ω, temos que $\int_\Omega |w_0|^{p^2}\,dx > 0$. Assim, pela condição $(f2)$ e do fato que $f \in C(\overline{\Omega} \times [0,\infty))$, que existe $C_\varepsilon > 0$ onde para todo $s \in [0,\infty)$

$$F(x,s) \ge (1-\varepsilon)\frac{b^{p-1}}{p^2}\mu_1 s^{p^2} - C_\varepsilon s^p. \tag{19}$$

Então, por (u_n) ser uma sequência $(PS)_c$ para o funcional I, por $\|u_n\| \to \infty$ e $q < p^2$, temos

$$\begin{aligned} o(1) &= \frac{1}{\|u_n\|^{p^2}}\left(I(u_n) + \frac{1}{q+1}\int_\Omega h(x)|u_n|^{q+1}\,dx\right) \\ &= \frac{1}{bp^2}\left(\frac{a}{\|u_n\|^p} + b\right)^p - \int_\Omega \frac{F(x,u_{n_+})}{\|u_n\|^{p^2}}\,dx, \end{aligned}$$

donde segue que

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \frac{F(x,u_{n_+})}{\|u_n\|^{p^2}}\,dx = \frac{b^{p-1}}{p^2}\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \frac{F(x,u_{n_+})}{\|u_n\|^{p^2}}\,dx = \frac{b^{p-1}}{p^2}.$$

Então, pela igualdade acima, a relação (19) e por $p^2 > p$, segue que

$$\begin{aligned} \frac{b^{p-1}}{p^2} &= \lim_{n\to\infty}\int_\Omega \frac{F(x,u_{n_+})}{\|u_n\|^{p^2}}\,dx + C_\varepsilon\frac{\|v_n\|_p^p}{\|u_n\|^{p^2-p}} \\ &\ge \lim_{n\to\infty}(1-\varepsilon)\frac{b^{p-1}}{p^2}\mu_1\|w_n\|_{p^2}^{p^2} \\ &= \lim_{n\to\infty}(1-\varepsilon)\frac{b^{p-1}}{p^2}\mu_1\|w_0\|_{p^2}^{p^2}. \end{aligned}$$

Dessa forma, temos que

$$(1-\varepsilon)\mu_1 = \frac{1}{\|w_0\|_{p^2}^{p^2}} \ge \frac{\|w_0\|^{p^2}}{\|w_0\|_{p^2}^{p^2}} \ge \mu_1,$$

o que é uma contradição pois $\varepsilon > 0$. Portanto $w_0 \equiv 0$ em Ω.

Segue de $(f3)$ e do fato que $f \in C(\overline{\Omega} \times [0,\infty))$, que existe $C > 0$ onde para todo $s \in [0,\infty)$

$$p^2F(x,s) - f(x,s)s \le Cs^p. \tag{20}$$

Assim, como (u_n) é uma sequência $(PS)_c$ ilimitada para o funcional I, pela relação (20) e $q+1 < p$, segue que

$$\begin{aligned} o(1) &= \frac{1}{\|u_n\|^p}p^2 I(u_n) - \langle I'(u_n),u_n\rangle \\ &= \frac{1}{\|u_n\|^p}[\frac{1}{b}(a+b\|u_n\|^p)^p - \frac{p^2}{q+1}\int_\Omega h(x)|u_n|^{q+1}\,dx - \int_\Omega p^2F(x,u_{n_+})\,dx - (a+b\|u_n\|^p)^{p-1}\|u_n\|^p \\ &\quad - \int_\Omega h(x)|u_n|^{q+1}\,dx - \int_\Omega f(x,u_{n_+})u_{n_+}\,dx] \\ &= \frac{1}{\|u_n\|^p}[\frac{a}{b}(a+b\|u_n\|^p)^{p-1} + o(1) - \int_\Omega p^2F(x,u_{n_+}) - f(x,u_{n_+})u_{n+}\,dx] \\ &\ge \frac{1}{\|u_n\|^p}[(p-1)a^{p-1}\|u_n\|^p - C\|u_n\|_p^p] + o(1) \\ &\ge (p-1)a^{p-1} + o(1) \end{aligned}$$

pois $w_n \to 0$ em $L^p(\Omega)$. Entretanto a última desigualdade é uma contradição pois $a > 0$ e $p-1 > 0$.

Portanto, (u_n) é uma sequência limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Sendo assim, pela Observação 2.1 podemos supor que $u_n \geq 0$ e devido o Lema 2.1 existe $0 \leq U_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que, a menos de subsequência $u_n \to U_2$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Uma vez que o funcional $I \in C^1(W_0^{1,p}(\Omega),\mathbb{R})$, segue que $I'(U_2) = 0$ e $I(U_2) = c > I(0) > I(U_1)$, onde U_1 é a solução de (8) obtida no Teorema 1.1. Logo, U_2 é solução fraca não negativa do problema (8), distinta da solução U_1.

Caso $h(x) \geq 0$, da mesma forma que na demonstração do Teorema 1.1 obtemos $\Delta_p U_2 \leq 0$ e assim, pelo Princípio do Máximo Forte de (Vazquez, 1984), $U_2 > 0$ $q.t.p.$ em Ω, o que conclui a demonstração.

□

Referências

Alves, C., O, Corrêa, F. J. S. A., Figueiredo, G. M. (2010). On a class of nonlocal elliptic problems with critical growth Differential Equations and Applications, 2, 409–417.

Alves, C. O., Corrêa, F. J. S. A., Ma, T. F. (2005). Positive solutions for a quasilinear elliptic equation of Kirchhoff type.Computers and Mathematics with Applications, 49, 85–93.

Cammaroto, F., Vilasi, L. (2011). Multiple solutions for a Kirchhoff-type problem involving the p(x)-Laplacianoperator. Nonlinear Analysis, 74, 1841–1852.

Colasuonno, F., Pucci, P. (2011). Multiplicity of solutions for p(x)-polyharmonic elliptic Kirchhoff equations. NonlinearAnalysis: Theory, Methods & Applications, 74, 5962–5974.

Corrêa, F., Figueiredo, G. (2006). On an elliptic equation of p-Kirchhoff type via variational methods. Bulletin of theAustralian Mathematical Society, 74, 263–277.

Dai, G. (2009). Infinitely many solutions for a p(x)-Laplacian equation in RN. Nonlinear Analysis: Theory, Methods &Applications, 71, 1133–1139.

Dai, G., Liu, D. (2009). Infinitely many positive solutions for a p(x)-Kirchhoff-type equation. Journal of MathematicalAnalysis and Applications, 359, 704–710.

Dai, G., Wei, J. (2010). Infinitely many non-negative solutions for a p(x)-Kirchhoff-type problem with Dirichletboundary condition. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 73, 3420–3430.

Ferrara, M., Khademloob, S., Heidarkhani, J. A. (2014). Multiplicity results for perturbed fourth-order Kirchhoff type elliptic problems. Applied Mathematics and Computation, 234, 316–325.

de Figueiredo, D. G. (1989). Lectures on the Ekeland Variational Principle with applications and detours. Springer-Verlag.

Guo, Y., Nie, J. (2015). Existence and multiplicity of nontrivial solutions for p-Laplacian Schrodinger-Kirchhoff-type equations. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 428, 1054–1069.

Hssini, E. M., Massar, M., Talbi, M., Tsouli, N. (2013). Infinitely many solutions for nonlocal elliptic p-Kirchhoff type equation under Neumann boundary condition. International Journal of Mathematical Analysis, 7, 1011–1022.

Hssini, E. M., Massar, M., Tsouli, N. (2015). Existence and multiplicity of solutions for a p(x)-Kirchhoff type problems. Bol Soc Paran Mat, 33, 201–215.

Huang, J., Chen, C., Xiu, Z. (2013). Existence and multiplicity results for a p-Kirchhoff equation with a concave-convex term. Applied Mathematics Letters, 26, 1070–1075.

Kirchhoff, G. (1883). Mechanik. Teubner.

Li, S., Wu, S., Zhou, H. S. (2002). Solutions to semilinear elliptic problems with combined nonlinearities. Journal of Differential Equations, 185, 200–224.

Liang, Z., Li, F., Shi, J. (2013). Positive solutions to Kirchhoff type equations with nonlinearities having prescribed asymptotic behavior. Annales de I Henri Poincare (C) Nonlinear Analysis, 31, 155–167.

Miotto, M. L. (2010). Multiple solutions for elliptic problem in RN with critical Sobolev exponent and weight function. Communications on Pure and Applied Analysis, 9, 233–248.

Miotto, M. L. (2014). Multiplicidade de soluções para uma classe de problemas quaselineares críticos em RN envolvendo função peso com mudança de sinal. Ciência e Natura, 36, 367–379.

Pei, R. (2012). On a p-Laplacian equation of Kirchhoff-type with a potential asymptotically linear at infinity. Journal of Mathematical Analysis, 6(27), 1347–1353.

Perera, K., Zhang, Z. (2006). Sign changing solutions of Kirchhoff type problems via invariant sets of descent flow. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 317, 456–463.

Schechter, M. A. (1991). A variation of the Mountain Pass lemma and applications. Journal London Math Soc, 44, 491–502.

Sun, J. J., Tang, C. L. (2011). Existence and multiplicity of solutions for Kirchhoff type equations. Nonlinear Analysis, 74, 1212–1222.

Vazquez, J. L. (1984). Strong Maximum Principle for some quasilinear elliptic equations. Applied Mathematics and Optimization, 12, 191–202.