Ciência e Natura, Santa Maria v.38 n.2, 2016, Mai.- Ago. p. 675 – 693
Revista do Centro de Ciências Naturais e Exatas - UFSM
ISSN impressa: 0100-8307 ISSN on-line: 2179-460X

CIÊNCIA e NATURA

Combinatória no Ensino Médio: concentrando o ensino nos Objetos de Aprendizagem

Combinatorics in High School: focusing on teaching Learning Objects

Evanilson Brandão Pinto e Jonatan Floriano da Silva

Secretaria de Educação do Ceará – SEDUC, CE, Brasil
mat.evanilson@yahoo.com.br
Universidade Federal do Ceará – UFC, CE, Brasil
jonatanfloriano@gmail.com

Resumo

Este trabalho aborda o uso de Objetos de Aprendizagem (OAs) voltado para o ensino de Combinatória e como esses objetos podem auxiliar no processo de aprendizagem dos alunos. Nesse sentido, o objetivo desse trabalho é verificar se a utilização de OAs nas aulas de Matemática promovem uma melhor assimilação dos conteúdos relacionados à Combinatória, buscando despertar no aluno a curiosidade e a investigação nesta área. Por isso, optou-se por um estudo experimental do qual participaram 20 alunos do 3º ano do Ensino Médio da Escola de Ensino Fundamental e Médio João Mattos, localizada em Fortaleza, Ceará. Esses alunos foram escolhidos de forma aleatória e divididos entre dois grupos, experimental e controle, com 10 alunos em cada grupo. Para a coleta dos dados, foram utilizados, um questionário socioeconômico e um teste de múltipla escolha sobre permutação, arranjo e combinação. Esses dados foram organizados e analisados com o auxílio do programa Microsoft Office Excel 2010. Os resultados mostram que o grupo que teve uma abordagem diferenciada (experimental) obteve um melhor desempenho em relação ao grupo que teve uma abordagem tradicional (controle).

Palavras-chave: *Combinatória, ensino médio, objetos de aprendizagem.*

Abstract

This work approaches the use of Learning Objects (LOs) facing the teaching of Combinatorics and how these objects can help in the learning process of students. Accordingly, the aim of this work is to check that the use of LOs in Math classes promotes a better assimilation of the contents related to Combinatorics, seeking to awaken in the student curiosity and research in this area. Therefore, we opted for an experimental study involving 20 students of the senior year of High School from School João Mattos, located in Fortaleza, Ceará. These students were chosen at random and divided between two groups, experimental and control, with 10 students in each group. For the collect of data, were used, a socioeconomic questionnaire and a multiple choice test about permutation, arrangement and combination. These data were organized and analyzed with the help of Microsoft Office Excel 2010 program. The results show that the group that had a differentiated approach (experimental) obtained a better performance compared to the group that had a traditional approach (control).

Keywords: *Combinatorics, high school, learning objects.*

Recebido: 12/11/2015 Aceito: 03/02/2016

1 Introdução

O avanço nas Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs) ocorrido nos últimos anos deu um novo suporte ao ato de ensinar e aprender. Nesse contexto, os recursos tecnológicos não podem ficar fora da escola. Essas ferramentas estão cada vez mais presentes no dia-a-dia de alunos e professores. Com o intuito de colaborar para a melhoria da educação, o uso de tecnologias baseadas no uso do computador tem promovido expectativas positivas.

Apesar do crescimento das TICs, percebemos em nossas escolas que aprender e ensinar matemática ainda são uma tarefa difícil e muitas são as dificuldades encontradas por professores que buscam enfrentar o desafio de ensinar bem e fazer com que o aluno aprenda de forma mais significativa os conceitos matemáticos. Atualmente, as escolas estão se munindo com recursos, como DVD, vídeo e principalmente de computadores, porém, o método de ensino oferecido pela maioria dos professores continua sendo de uma abordagem tradicional. Segundo Saviani (2008), a abordagem tradicional se caracteriza pela centralização do professor no processo de ensino, que deve organizar e transmitir de forma logicamente sistemática os conhecimentos aos alunos. A estes cabe apenas a memorização dos conhecimentos que lhes são transmitidos.

Muitos professores de Matemática sentem grandes dificuldades de ensinar Combinatória no Ensino Médio. Essas dificuldades podem estar relacionadas a um raciocínio combinatório pouco desenvolvido pelos alunos, ou até mesmo pelos professores, fazendo com que eles sintam dificuldades de interpretar problemas combinatórios. Dessa forma, como parte teórica do nosso trabalho, despertou-nos o interesse de apresentar uma fundamentação teórica mais aprofundada de alguns conceitos combinatórios utilizando uma linguagem matemática mais sofisticada, visto que, tais conteúdos exigem métodos de raciocínio formal, pelos quais servirão de auxílio na interpretação de problemas. Já, como parte prática, fomos motivados a aplicar atividades diferenciadas, utilizando Objetos de Aprendizagem (OAs), a fim de verificar se a utilização desses objetos, nas aulas de Matemática, promovem uma melhor assimilação dos conteúdos relacionados à Combinatória, buscando despertar no aluno a curiosidade e a investigação nessa área e com isso obter uma aprendizagem mais significativa

A Combinatória é um importante ramo da Matemática que estuda os métodos de contagem. Surgiu da necessidade de se determinar a quantidade de possibilidades que um evento podem ocorrer em uma determinada experiência, sem precisar enumerar cada uma dessas possibilidades.

Entendemos que o raciocínio combinatório faz com que o aluno seja capaz de analisar situações, obter estratégias de resolução, encontrar possiblidades, além de desenvolver uma autonomia, sendo crítico e argumentativo. Segundo Piaget e Inhelder (1995), o pensamento combinatório tem essencial importância no desenvolvimento e aprendizagem dos estudantes.

A segunda parte de nosso trabalho consistiu em ministrar uma aula de revisão e aplicar um teste de sondagem, referente ao assunto de Combinatória, com dois grupos formados por alunos do 3º ano do Ensino Médio e que foram escolhidos de forma aleatória. Segundo Triviños (2008), a seleção da amostra, de forma aleatória, é essencial para a formação dos grupos experimental e de controle. Com o grupo de controle trabalhamos a abordagem tradicional de ensino e com o grupo experimental utilizamos uma abordagem diferenciada.

A abordagem tradicional que foi utilizada, com os alunos do grupo de controle, consistiu em levá-los para uma sala de aula, onde foram revisados os assuntos de Combinatória (Permutação, Arranjo e Combinação) e que foram utilizados como recursos didáticos apenas o pincel e lousa. Após a realização desta aula, foi aplicado um teste de múltipla escolha sobre o assunto.

Já na abordagem diferenciada, que foi aplicada aos alunos do grupo experimental, pretendíamos levá-los para o laboratório de informática, revisar os assuntos de Combinatória, mas com o uso dos OAs encontrados no RIVED (Rede Interativa Virtual de Educação). Em seguida, foi aplicado um teste de múltipla escolha.

Tanto as definições e os exemplos utilizados na aula quanto o teste de sondagem foram os mesmos para os dois grupos. Fizemos isso com o intuito de evitar que um grupo ficasse em desvantagem sobre o outro e, com isso, interferisse nos resultados da pesquisa.

Os assuntos abordados foram trabalhados na seguinte ordem: arranjo, permutação e combinação. Escolhemos essa ordem, pois seguimos a linha de raciocínio de como foram criados os três OAs, os quais foram utilizados nessa atividade. Ressaltamos que essa ordem foi estabelecida para os dois grupos.

Os alunos que participaram da pesquisa já tiveram contato com o assunto anteriormente, visto que assuntos relacionados à Combinatória fazem parte do currículo do 2º ano do Ensino Médio.

A pesquisa foi feita através de estudo experimental, com o intuito de verificar se a abordagem diferenciada de ensino utilizando-se OAs promovem melhores resultados do que a abordagem tradicional, ou seja, queríamos saber se os alunos do grupo experimental iriam obter desempenhos superiores aos alunos do grupo de controle.

Esperamos que os resultados desse estudo sirvam como estímulo para que os professores de Matemática explorem as diferentes possibilidades da utilização do computador como recurso pedagógico em sala de aula e que se sensibilizem da importância das tecnologias como subsídio para o ensino de conhecimentos matemáticos.

2 O RIVED e Objetos de Aprendizagem

2.1 Conhecendo o RIVED

O RIVED (Rede Interativa Virtual de Educação) é um programa do Ministério de Educação e Cultura que surgiu em 1999 através de um acordo entre Brasil e Estados Unidos visando o desenvolvimento de Objetos de Aprendizagem (OAs) para serem utilizados como um suporte pedagógico. De 1999 a 2003, a equipe do RIVED do Brasil, na Secretaria de Educação a Distância (SEED) foi responsável pela criação de 120 OAs em várias áreas do conhecimento do Ensino Médio, como Matemática, Física, Química e Biologia. A partir de 2004, a SEED passou o trabalho de desenvolver OAs para as instituições públicas de Ensino Superior, cuja ação foi denominada de *Fábrica Virtual*. Com a expansão do RIVED para essas instituições, passou-se também a criar OAs para o Ensino Fundamental.

Nascimento (2004) descreve que o RIVED consiste na construção de conteúdos digitais com design instrucional de atividades pedagógicas baseado na web, que podem auxilar professores e alunos no processo de ensino-aprendizagem de conteúdos específicos. Os conteúdos inseridos nestes OAs devem fazer com que os alunos sejam estimulados a pensar e raciocinar criticamente no ambiente escolar. Além disso, esses conteúdos devem conter questões que sejam relevantes para o aluno, oferecendo oportunidades de exploração do aluno.

Nesse sentido, o que se pretende com o RIVED, disponibilizando esses conteúdos digitais, é melhorar o ensino de várias disciplinas da educação básica e a formação da cidadania do aluno.

O RIVED está estruturado dentro das seguintes características:

> • É um programa educativo e não um programa tecnológico;
> • Propõe uma reforma educativa e não uma reforma curricular;
> • É um sistema integrado e não um material adicional de informação educativa;
> • Propõe a melhoria das aulas, mas não é substituto da aula e do professor;
> • Está implantado na Internet, mas não depende dela.
>
> (RIVED, 31/01/2015).

O RIVED oferece capacitações para a elaboração e utilização de OAs nas instituições de ensino superior e na rede pública de ensino. O intuito dessas capacitações com a produção de objetos é alimentar um repositório público de conteúdos digitais, onde são disponibilizados de forma gratuita aos professores e alunos das escolas, recursos de aprendizagem.

2.2 OAs desenvolvidos segundo a metodologia do RIVED

Segundo Wiley (2000), os OAs podem ser compreendidos como "qualquer recurso digital que possa ser reutilizado para o suporte ao ensino". A ideia principal é a produção de componentes instrucionais que podem ser reutilizados inúmeras vezes em diferentes contextos de aprendizagem. Esses objetos baseiam-se em um objetivo de aprendizado e desempenho, que é construído a partir de uma coleção de atividades interativas voltadas para o ensino de um determinado conteúdo.

Os OAs criados pelo RIVED dão um apoio pedagógico a fim de tornar a aprendizagem mais significativa, onde as aulas ficam mais interativas e com isso atrair o professor. Esses objetos apresentam animações e simulações do cotidiano do aluno, fazendo com que o aluno se interesse pelo conteúdo a ser abordado.

> A possibilidade de testar diferentes caminhos, de acompanhar a evolução temporal das relações, causa e efeito, de visualizar conceitos de diferentes pontos de vista, de comprovar hipóteses, fazem das animações e simulações instrumentos poderosos para despertar novas ideias, para relacionar conceitos, para despertar a curiosidade e para resolver problemas. (RIVED, 31/01/2015).

No que se refere a metodologia RIVED, os OAs devem possuir os seguintes itens: Design pedagógico, Roteiro e Guia do Professor. O Design pedagógico deve conter as expectativas e justificativas do professor com relação a utilização do objeto a ser aplicado aos seus alunos. No Roteiro deve constar esquemas de todas as telas que serão interagidas com o usuário, assim como uma descrição, em cada tela, das atividades a serem executadas. Já no Guia do Professor, deve conter orientações sobre o uso do objeto de aprendizagem e das atividades propostas, onde serão apresentados os conteúdos, os objetivos da aplicação do objeto, as questões para discussões, e além disso conter dicas que orientem o professor nas aulas realizadas no laboratório de informática.

Os OAs do RIVED ficam armazenados em um repositório disponível na web. O professor tem liberdade de utilizar os conteúdos sem depender das estruturas rígidas, ou seja, ele pode usar todo o conteúdo, algumas atividades ou alguns OAs como animações e simulações.

2.2.1 Objetos de Aprendizagem aplicados

Neste tópico, faremos uma breve explanação dos OAs que serão aplicados. Esses objetos estão relacionados com o assunto de Combinatória divididos em três conteúdos: Arranjo, Permutação e Combinação. A tela de entrada, como mostra a Figura 1, é a mesma para os três objetos, na qual aparece uma cidade, dando ao aluno a noção de que o assunto abordado está presente no seu dia-a-dia.

Figura 1: Tela inicial

A tela inicial possui um menu onde o aluno pode interagir com o OA bastando dá um click em cima de cada opção. Por exemplo, se o aluno optar por "atividades", o objeto o levará para outra parte da cidade, e lá ele fará as atividades propostas, relacionadas ao conteúdo estudado.

Ressaltamos que todas as janelas do objeto possuem textos de ajuda, que dão dicas ao aluno durante o período de realização das atividades. Na opção "atividades", possui simulações que foram planejadas a fim de envolver o aluno no processo de desenvolvimento das atividades. No objeto de Arranjo, podemos encontrar duas atividades desse tipo, a primeira é sobre placas de carro, conforme Figura 2, onde propõe-se que o aluno crie novas placas a partir de uma dada.

Figura 2: Atividade sobre confecções de placas de carro

E a segunda, é sobre senhas de banco, conforme Figura 3, onde permite ao aluno gerar novas senhas de banco a partir de números dados.

Em ambas as atividades, o aluno é levado a perceber o que ocorre quando formamos agrupamentos ordenados com os elementos presentes em cada atividade. No objeto de Permutação, também podemos encontrar duas atividades, uma delas permite ao aluno criar novas palavras trocando a posição das letras da palavra PARE, conforme Figura 4.

A outra atividade do objeto de Permutação permite que o aluno faça algumas disposições de livros em uma estante, conforme Figura 5.

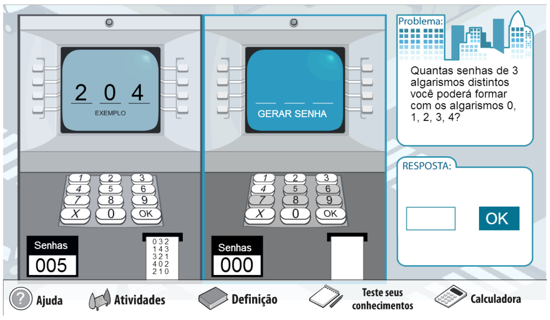

Figura 3: Atividade sobre formação de senhas de banco

Figura 4: Atividade sobre anagramas da palavra PARE

Figura 5: Atividade sobre disposição dos livros na estante

Assim como os dois objetos anteriores, o objeto de Combinação possui duas atividades, sendo que a primeira faz com que o aluno forme duplas de ciclistas a partir de um número de ciclistas dado, conforme Figura 6.

Na segunda atividade do objeto de Combinação, leva o aluno a simular uma aposta na loteria, como mostra a Figura 7.

Observemos que em cada atividade, há um espaço onde o aluno colocará sua resposta e depois, clicando em OK, o aluno poderá ver a solução do problema proposto. Além das atividades mencionadas acima, a tela inicial de todos os objetos possuem outras opções na barra de ferramentas, como por exemplo, "Calculadora" e "Teste seus conhecimentos", conforme Figura 8. Esses testes

Figura 6: Atividade sobre formação de duplas

Figura 7: Atividade sobre apostas na loteria

são constituídos de questões de múltipla escolha, onde o aluno deverá resolvê-las e depois assinalar a alternativa correta.

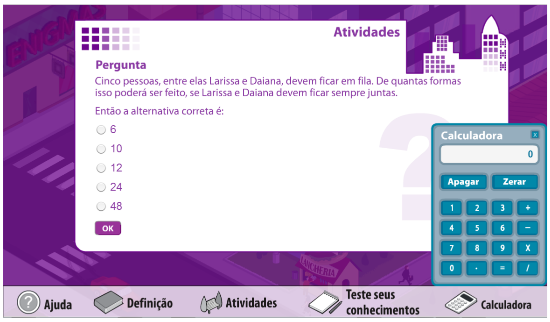

Figura 8: Opções Calculadora e Teste seus conhecimentos

Caso o aluno marque uma alternativa incorreta, assim como acontece nas atividades descritas, o objeto dá um feedback, conforme Figura 9.

Quando o aluno utiliza esses objetos, ele percebe que sem o conhecimento matemático não dá pra realizar as atividades e, além disso, percebe que os OAs foram desenvolvidos para retratar situações do seu cotidiano, ou seja, os objetos permitem que o aluno perceba que essas situações estão presentes no seu dia-a-dia. Os OAs apresentados aqui, encontram-se no repositório RIVED-MEC (www.rived.mec.gov.br).

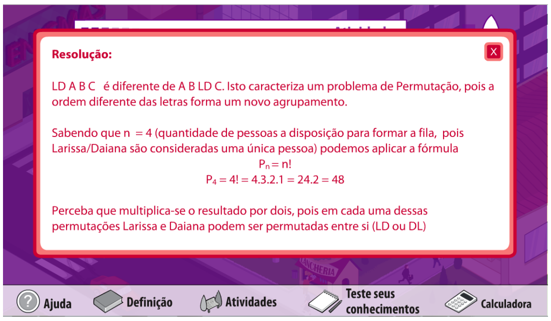

Figura 9: Feedback

3 Um pouco sobre Combinatória

3.1 Abordagem histórica da Combinatória

Os primeiros trabalhos sobre o surgimento de padrões combinatórios iniciaram quando a própria civilização estava se formando. A história da Combinatória abrange diversas culturas em muitas partes do mundo, onde se relaciona com linguística, astronomia, religião, entre outros elementos. Apresentaremos algumas das principais civilizações que se destacaram nesse ramo, através de problemas combinatórios que fizeram com que os estudos sobre combinatória avançassem com o passar dos tempos e que ainda continuam avançando até hoje.

Em um dos manuscritos mais antigos da Matemática, o *papiro de Rhind* (cerca de 1650 a.C.), existe um famoso problema chamado de *Problema 79*. Talvez esse problema seja o registro mais antigo de que se tem de um problema relacionado com a Combinatória. O problema pode ser traduzido, aproximadamente, como segue:

Bens	
Casas	7
Gatos	49
Camundongos	343
Espigas de Trigo	2401
Hectares de grãos	16807
Total	19607

(EVES, 2004, p. 75).

Inicialmente, este problema foi entendido como uma notação simbólica usada pelo escriba para as potências de 7. Mais tarde, notou-se uma ligação desse problema com outro semelhante a ele, no qual foi apresentado no *Liber Abaci*, escrito por Leonardo de Pisa (1170–1250), também conhecido como Fibonacci, em 1202. O problema de Fibonacci é apresentado da seguinte forma: *"Sete mulheres idosas estão indo para Roma; cada uma delas tem sete mulas; cada mula carrega sete sacos: cada saco contém sete pães; cada pão tem sete facas: e cada faca tem sete bainhas. Qual é o número total de coisas?"*.

Apesar do problema 79 se referir a soma de uma sequência de potências de 7, do ponto de vista da Combinatória, esse problema evidencia a utilização de um princípio chamado *principio multiplicativo*, como uma técnica de contagem.

Em um dos trabalhos chineses mais antigos, o *I Ching* (O Livro das Mutações) (1182–1135 a.C.), percebemos evidências de conhecimentos combinatórios pelos chineses. No *I Ching* aparece o Liang I, ou "os dois princípios" (o Yang, -, e o Ying, - -). A partir da combinação desses símbolos, formam-se $2^3 = 8$ trigramas (sequência de três símbolos) e $2^6 = 64$ hexagramas (sequências de seis símbolos). Este livro é constituído essencialmente por $2^6 = 64$ capítulos, e cada capítulo é simbolizado por um hexagrama.

Podemos relacionar esses hexagramas com o que hoje é chamado de "arranjos com repetição", já que se quisermos enumerar todas as sequências de r símbolos, cada uma das quais pode ser tomada de um conjunto de n símbolos, encontraremos n^r sequências.

Apesar dos antigos chineses terem verificado a relação n^r para os arranjo com repetição, através da enumeração de todos os casos possíveis, devemos considerar que apenas a ordenação desses hexagramas está relacionada com a Combinatória, tendo em vista que não há registros que evidenciam o trabalho matemático empregado para se chegar a essa relação.

A contribuição dos gregos para a Combinatória também deve ser mencionada, apesar de existir poucas observações pertinentes em toda literatura grega existente sobre cálculos combinatórios. Uma passagem interessante e misteriosa está presente em *Questiones Conviviales* de Plutarco como segue abaixo:

> Chrysippus diz que o número de proposições compostas que podem ser feitas a partir de apenas dez proposições simples excede um milhão. Hipparchus, estando seguro, refutou esta afirmação mostrando que no lado afirmativo existem 103.049 declarações compostas, e no lado negativo 310.952. Xenocrates afirmou que o número de sílabas cujas letras estarão em combinação é 1.002.000.000.000. (MINAR, apud BIGGS, 1979, p. 113).

Quanto a utilização de princípios básicos de combinatória pelos gregos, para se chegar a tais resultados, não podemos afirmar nada. A falta de qualquer outra evidência significativa para se chegar a esses resultados mostra que os gregos não tinham muito interesse nesse assunto. A verdadeira razão para a tal passagem pode ser mais de natureza filosófica e cultural do que matemática, ou simplesmente um acidente histórico.

Parece que, muito antes, os hindus já trabalhavam com problemas combinatórios. Um exemplo típico aparece no *tratado médico de Surshuta*, que data aproximadamente, do século VI a.C. Nesse tratado, encontramos uma discussão sobre os vários tipos de sabores que podem ser feitos através da combinação simples de seis qualidades: *doce*, *ácido*, *salgado*, *picante*, *amargo* e *adstringente*. Existe uma lista, onde são enumeradas as combinações: seis tomadas separadamente, quinze em grupos de dois, vinte em grupos de três, quinze em grupos de quatro, seis em grupos de cinco, e uma com todas as qualidades juntas. Essas combinações sem repetições assim listadas são chamadas simplesmente de *combinações* (assunto que abordaremos na seção 3.3).

No *Lilavati*, escrito por Bhaskara (1114–1185) em 1150, aparece outra contribuição para a Combinatória. A seguir, mostraremos um exemplo que aparece no Capítulo IV dessa obra:

> Em um agradável edifício espaçoso e elegante, com oito portas, construídos por um arquiteto habilidoso para o Senhor da terra, diga-me as [combinações] de aberturas tomadas uma a uma, duas a duas, três a três, etc. (COLEBROOK, apud BIGGS, 1979, p. 116).

Em outra parte do *Lilavati*, no capítulo XIII, podemos encontrar um problema sobre *permutações* (assunto que abordaremos na seção 3.3). O problema é enunciado da seguinte maneira:

> Quantas são as variações da forma do deus Sambu (Siva) obtidas pelas permutações de seus 10 atributos sustentados reciprocamente por suas diversas mãos, a saber: a corda, a tromba do elefante, o tamborim, a serpente, a caveira, o tridente, a armação de cama, a adaga, o arco, a flecha; e as de Hari, pelas permutações do cetro, do disco, da flor de lótus e da trombeta? (EVES, 2004, p. 272).

Os problemas que aparecem no *Lilavati* sobre combinatória, pelos quais envolvem uma quantidade pequena de objetos, mostram a preocupação de Bhaskara em apresentar situações em que a obediência ou não à ordem dos elementos nos agrupamentos deva ser relevante para quem pretende resolvê-los.

Muitos estudiosos judeus desde os primeiros anos de nossa era estavam interessados em calcular permutações e combinações. Podemos encontrar evidências de assuntos sobre combinatória em uma das primeiras obras hebraicas, chamada *Sefer Yetzirah* (Livro da Criação), que parece ter sido escrita na Palestina antes do terceiro século da era cristã. Nesta obra, o autor desconhecido calculou as várias maneiras em que as vinte e duas letras do alfabeto hebraico podem ser arranjadas. Vejamos uma passagem, em que o autor descreve como fazer palavras a partir de apenas duas letras:

> Ele fixou as vinte e duas letras na esfera como uma parede com 231 portas, e a esfera girava para frente e para trás... Mas como isso foi feito? Ele combinou... a letra א (Aleph) com todas as outras letras em sucessão, e todas as outras novamente com א; o ב (Bet) com todas e todas novamente com ב, e assim por toda a série de letras. Daí segue-se que há 231 formações. (KATZ, p.100, tradução nossa).

Na passagem abaixo, o autor também descreveu como fazer palavras de mais de duas letras:

> Duas pedras [letras] constroem duas casas [palavras], três constroem seis casas, quatro constroem vinte e quatro casas, cinco constroem cento e vinte casas, seis constroem setecentos e vinte casas, e sete constroem cinco mil e quarenta casas. A partir daí vai prosseguindo até que a boca não possa mais expressar e o ouvido não possa mais escutar. (KATZ, p.100, tradução nossa).

Provavelmente, o autor de *Sefer Yetzirah* entendia que o número de agrupamentos possíveis, de n letras distintas era $n \cdot (n-1) \ldots 2 \cdot 1$, que é chamado *fatorial* de um número natural n.

No campo da astrologia, os judeus também deram suas contribuições para o desenvolvimento da Combinatória através da obra do rabino Abraham ben Meir ibn Ezra (1090–1167), um filósofo judeu-espanhol, astrólogo, e comentarista bíblico. Abraham ibn Ezra abordou combinações em um texto astrológico, onde ele queria saber quantas conjunções possíveis existiam entre sete planetas (incluindo o Sol e a Lua). Nesse texto, Abraham ibn Ezra dá uma derivação detalhada das regras do número de combinações possíveis, ou seja, ele mostra como calcular $C_{7,p}$ (mais detalhes dessa regra na seção 3.3), para cada inteiro p variando de 2 a 7 e observou que o número total dessas combinações era 120.

Um estudo mais sistemático do assunto é atribuído ao rabino Levi ben Gerson, um astrônomo, filósofo, matemático e comentarista bíblico, que passou toda a sua vida no sul da França. Em 1321, Levi ben Gerson escreveu seu trabalho matemático mais importante, o *Maasei Hoshev*, no qual ele dá cuidadosamente provas rigorosas de várias fórmulas combinatórias, como por exemplo, a fórmula para o cálculo do número de *arranjos simples*.

Com o advento do Islã, o status privilegiado dos árabes favoreceu o desenvolvimento de várias "ciências da linguagem". Nesse sentido, lexicógrafos listaram, e às vezes contaram, configurações de letras do alfabeto árabe atendendo certas restrições. Al-Khalil ibn Ahmad (717–791) calculou a quantidade de agrupamentos possíveis de duas, três, quatro ou cinco letras das vinte e oito letras do alfabeto árabe. Outros autores islâmicos como Thabit ibn Qurra (830–890) e Abu Kamil ibn Aslam (850–930) buscaram resolver problemas combinatórios sem referência a regras ou a resultados prévios e não se preocupavam em demonstrar as soluções encontradas bem como em criar regras para a obtenção dessas soluções.

A contribuição de Ahmad ibn Mun'im al-Abdari, um matemático de Marrakesh relativamente pouco conhecido, para a combinatória também merece ser mencionada. Foi no livro *Fiqh al-hisāb* (A ciência do Cálculo), de sua autoria, que ele descreveu sua abordagem e seus resultados combinatórios. Ibn Mun'im também se dedicou a problemas que envolviam conjunto de letras, onde ele buscava determinar o número de palavras possíveis que poderiam ser formados a partir das letras do alfabeto árabe. Mas antes de lidar com esses tipos de problemas, ele considerou um problema diferente: *quantos pacotes diferentes de cores podem ser feitos com dez cores diferentes de seda?* Através desse problema, ibn Mun'im estabeleceu uma regra que permitia determinar todas as combinações possíveis de k cores, escolhidas dentre as n cores disponíveis. Para isto, usou um método indutivo e uma abordagem combinatória para construir uma tabela numérica. Com isso, ele construiu o famoso *triângulo aritmético*, pelo qual os algebristas do Império Islâmico já o tinham construído em uma abordagem algébrica, com a intenção de determinar o que chamamos de *coeficientes binomiais*, que denotamos por $C_{n,k}$ ou $\binom{n}{k}$.

Podemos observar que ao longo da história, as evidências encontradas a respeito de problemas combinatórios apontam que a contribuição da Matemática oriental foi de suma importância para o desenvolvimento da Combinatória.

Outros estudos sobre combinatória apareceram na Europa, no período da Idade Média, através dos trabalhos, de natureza filosófica, do catalão, poeta e missionário Ramon Llull (1232–1316). Em uma de suas obras, o *Ars Magna* (1305), ele apresenta um resumo sistemático de todos os ramos do conhecimento de seu tempo, baseado em combinatória. Assim sendo, combinatória se tornou a ferramenta básica para explorar tudo o que era conhecido na época. O *"Lulismo"* permaneceu importante por vários anos, e floresceu especialmente no século XVII. Apesar de Llull ter contribuído pouco para a teoria da combinatória, os adeptos ao Lulismo publicaram inúmeros e consistentes livros sobre o assunto. Por não serem matemáticos, esses estudantes tiveram pouca influência na matemática. Além disso, as regras que eles obtiveram em seus trabalhos não continham demonstrações.

O frade francês Marin Mersenne (1588–1648), fortemente influenciado pelo Lulismo, foi um dos mais importantes autores renascentistas da história da Combinatória. Seus estudos sobre combinatória foram definidos em seis publicações, que foram publicados entre 1623 e 1647, cujos títulos mostram que esses estudos eram direcionados a matemáticos e a teólogos. Outros lulistas também se destacaram no ramo da Combinatória, como o jesuíta e cientista alemão Athanasius Kircher (1602–1680) em sua obra *Musurgia universalis*; o alemão Kaspar Schott (1608–1666) em *Magia Universalis*, que era discípulo de Kircher; o jesuíta espanhol Sebastián Izquierdo (1601–1681) em *Pharus Scientiarum*; o espanhol Cistercian Juan Caramuel de Lobkowitz (1606–1682) em *Mathesis Biceps Vetus et Nova* e o jesuíta alemão Kaspar Knittel (1644–1702) em *Via Regia ad Omnes Scientias et Artes*. O Lulismo declinou na segunda metade do século XVII e estudiosos como Kircher e Caramuel foram severamente criticados por representantes da nova ciência.

Na época da Renascença, muitos problemas e regras para cálculos combinatórios foram apresentados em livros e textos sobre aritmética, porém, em muitos desses trabalhos não apareciam demonstrações. Isso podia ser notado, nos trabalhos de Luca Pacioli (1445–1517) em *Summa de Arithmetica Geometria Proportioni e Proportionalità*; Girolamo Cardano (1501–1576) em *Practica Arithmeticae e Opus Novum de Proportionibus*; Michael Stifel (1487–1567) em *Arithmetica Integra*; Niccolò Tartaglia (1500–1557) em *General Trattato di Numeri et Misure* e Jean Borrel (1492–1572) em *Logistica*.

No século XVII, os estudos sobre combinatória chegaram a um novo nível dentro da Matemática, onde foram discutidos de forma mais intensa por muitos matemáticos da época como Bernard Frénicle de Bessy (1605–1675), Thomas Strode (1642–1688) e John Wallis (1616–1703). Os matemáticos Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) em *Dissertatio de Arte Combinatoria* e Jacob Bernoulli (1654–1705) em *Ars Conjectandi* também deram suas constribuições para o desenvolvimento da combinatória.

No livro *Traité du Triangle Arithmétique* escrito por Blaise Pascal (1623–1662) e publicado em 1665 aparece o famoso triângulo aritmético, onde Pascal desenvolveu e fez aplicações de muitas das propriedades desse triângulo. Devido a este livro, o triângulo aritmético tem sido muitas vezes conhecido como o triângulo de Pascal, apesar do fato de que ele não foi, por vários séculos, o primeiro a discutir o assunto, como visto anteriormente nos trabalhos de ibn Mun'im. No Irã, o triângulo é chamado triângulo de Khayyam e na China, triângulo de Yang Hui (1238–1298). Antes de Omar Khayyam, esse triângulo já tinha sido estudado na Índia por Pingala (200 a.C.). Outro matemático árabe, Abu Bakr ibn Muhammad ibn al Husayn al-Karaji (953–1029), trabalhou também com esse triângulo. No triângulo de Pascal, cada número é a soma dos dois números acima dele, conforme a Figura 10.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 1 & & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & &
\end{array}
$$

Figura 10: Triângulo de Pascal

Observemos que os números ao longo de uma linha, como mostra a figura, são os coeficientes sucessivos de uma expansão binomial do tipo $(a+b)^n$, conhecido como *Binômio de Newton*. Por exemplo, os números ao longo da quinta linha, a saber, 1, 4, 6, 4, 1 são os coeficientes sucessivos da expansão de $(a+b)^4$. Pascal deixa bem claro que os números no triângulo aritmético são importantes, tanto como coeficientes binomiais quanto como números de combinações. Ele usou esses números com grande efeito em problemas relacionados a jogos de azar, em particular, na solução do famoso *Problema dos Pontos*, que foi discutida por meio de cartas com Pierre de Fermat (1601–1665). O livro de Pascal pode ser considerado o primero trabalho moderno sobre Combinatória.

A partir dos estudos feitos pelos os matemáticos europeus a Combinatória começa a ganhar um aspecto mais formal, se tornando um importante instrumento que permitiu a sua inserção em áreas como Probabilidade, Estatística e Teoria dos grafos.

3.2 O Ensino de Combinatória

São grandes as discursões entre professores de matemática quanto a dificuldade por parte dos alunos em se aprender esse assunto e dos professores em arranjar métodos de aprendizagem que sejam eficientes. Assim sendo, são inúmeros os questionamentos que permeiam a construção de conceitos pelos alunos, principalmente no momento em que professores começam a refletir como o aluno irá adquirir esses conceitos. E em Combinatória não é diferente. Segundo os PCNEM (1999, p. 44),

> "As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizarem inferências e fazer predições com base numa amostra de população, aplicar as ideias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas."

Quando nos referimos ao ensino de Combinatória, em geral nos deparamos com muitas dificuldades com relação ao aprendizado do aluno. E até mesmo, em geral, os professores de Matemática sentem uma certa dificuldade em ensinar esse assunto, nos quais julgam como difícil de se trabalhar. Segundo Hariki (1999, p. 29),

> "Os problemas combinatórios são considerados usualmente difíceis pela maioria dos alunos e professores de Matemática. Talvez a principal dificuldade seja a da conexão correta entre o problema dado e a teoria matemática correspondente: é difícil determinar se o problema combinatório é um problema de arranjo, de permutação ou de combinação, ou então se é suficiente usar diretamente o princípio multiplicativo."

Os PCN+ do Ensino Médio (BRASIL, 2002, p. 126) apontam novas possibilidades para o ensino de Combinatória, ou seja, nos diz que:

> "[...] a contagem, ao mesmo tempo em que possibilita uma abordagem mais completa da Probabilidade

por si só, permite também o desenvolvimento de uma nova forma de pensar em Matemática, denominada raciocínio combinatório."

Para Pessoa e Borba (2010), raciocínio combinatório é um tipo de pensamento que envolve contagem, mas que vai além da enumeração de elementos de um conjunto.

Na visão desses autores, o ensino de Combinatória deve ocasionar em sala de aula o desenvolvimento desse raciocínio combinatório por parte dos alunos, a partir de diversos contextos em que sejam trabalhados.

Desse modo, para ajudar na construção desse raciocínio combinatório, os PCN+ do Ensino Médio (BRASIL, 2002, p. 127) apontam ainda sobre a função das fórmulas, indicando que elas:

> "[...] devem ser consequência do raciocínio combinatório desenvolvido frente à resolução de problemas diversos e devem ter a função de simplificar cálculos quando a quantidade de dados é muito grande. Esses conteúdos devem ter maior espaço e empenho de trabalho no Ensino Médio, mantendo de perto a perspectiva da resolução de problemas aplicados para se evitar a teorização excessiva e estéril."

3.3 Conceitos básicos da Combinatória

Há dois princípios básicos de contagem que podem ser considerados como os alicerces da Combinatória: o *Princípio Aditivo* e o *Principio Multiplicativo*. Nesta seção, vamos apresentar esses princípios e algumas fórmulas de contagem que eles implicam.

3.3.1 Princípios Básicos de Contagem

Definição 1 (Partição de um conjunto). Seja A um conjunto finito não vazio. Uma *partição* de A é uma coleção de conjuntos A_1, A_2, ..., A_n, todos não vazios, e tais que:

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i,$$

$$A_i \cap A_j = \varnothing, i \neq j.$$

Portanto, os conjuntos $A_1, A_2, ..., A_n$ são disjuntos dois a dois e a união deles é o conjunto A. Os conjuntos $A_1, A_2, ..., A_n$ são chamados as *partes* da partição. Dizemos também que A foi *particionado* pelos conjuntos $A_1, A_2, ..., A_n$. Usaremos a notação $|A|$ para indicar o número de elementos de um conjunto A e, às vezes, chamado o *tamanho* de A.

A seguir, mostraremos um lema que será utilizado na demonstração de um princípio básico de contagem, chamado de *Princípio Aditivo*.

Lema 1. Sejam A e B dois conjuntos finitos quaisquer. Então:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Prova. Notemos que $|A \cup B|$ é o número de elementos que pertencem a A ou B. Daí, para contar os elementos de $A \cup B$ contamos todos os elementos de A ($|A|$) e todos os de B ($|B|$). Fazendo isso, os elementos de $A \cap B$ foram contados duas vezes, uma em $|A|$ e outra em $|B|$, portanto devemos subtrair a segunda contagem desses elementos. Logo,

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

■

Teorema 1 (Princípio Aditivo). Suponha que um conjunto A, finito e não vazio, seja particionado pelos conjuntos $A_1, A_2, ..., A_n$, $n \geq 2$, disjuntos dois a dois. Então,

$$|A| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|.$$

Prova. Mostraremos por indução finita sobre n. De fato, para $n = 2$, a afirmação é verdadeira, pois, como $|A_1 \cap A_2| = 0$, já que A_1 e A_2 são disjuntos, pelo Lema 1, temos que $|A| = |A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2|$. Suponhamos que a afirmação seja válida para $n-1$ conjuntos, $n \geq 3$. Consideremos $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ uma partição de A. Seja $A' \subset A$ um conjunto particionado pelos conjuntos $A_1, A_2, ..., A_{n-1}$. Daí, temos por hipótese de indução que,

$$|A'| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_{n-1}|.$$

Além disso, observemos que $\{A', A_n\}$ é uma partição de A, pois $A = A' \cup A_n$ e $A' \cap A_n = \varnothing$. Portanto, pelo Lema 1 e pela hipótese de indução, temos que

$$\begin{aligned} |A| &= |A' \cup A_n| \\ &= |A'| + |A_n| \\ &= |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_{n-1}| + |A_n|. \end{aligned}$$

Segue então que o teorema é válido para todo $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$.

■

A seguir, mostraremos um lema que será utilizado na demonstração do *Princípio Multiplicativo*, conhecido também como *Princípio Fundamental da Contagem* (PFC).

Lema 2. Sejam A e B conjuntos finitos e não vazios, com $|A| = p$ e $|B| = q$. Então, o número de pares ordenados (a, b) tais que $a \in A$ e $b \in B$ é $p \cdot q$.

Prova. Consideremos $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$. Tomemos X como sendo o conjunto de todos os pares ordenados (a, b), onde $a \in A$ e $b \in B$. Devemos mostrar que $|X| = p \cdot q$. Assim sendo, consideremos os conjuntos dois a dois disjuntos $X_i = \{(a_i, b) \in X; b \in B\}$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$. Daí, temos que $\{X_1, X_2, \ldots, X_p\}$ é uma partição de X. Observemos que $|X_i| = q$, pois $|B| = q$. Logo, pelo princípio aditivo,

$$|X| = |X_1| + |X_2| + \cdots |X_p| = \underbrace{q + q + \cdots + q}_{p \text{ vezes}} = p \cdot q.$$

∎

Teorema 2 (Princípio Multiplicativo). Sejam A_1, A_2, ..., A_n, $n \geq 2$, conjuntos finitos não vazios, com $|A_1| = p_1, |A_2| = p_2, \ldots, |A_n| = p_n$. Então, o número de n-uplas (sequências de n elementos) do tipo $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ tal que $a_i \in A_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, é

$$p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n.$$

Prova. Mostraremos por indução finita sobre n. De fato, para $n = 2$, o resultado é imediato, pois segue do Lema 2. Suponhamos que o resultado seja válido para $n-1$ conjuntos, $n \geq 3$ e provaremos que ele também é válido para n. Assim, para $n-1$, tomemos A como sendo o conjunto de todas as sequências de $n-1$ elementos $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$, onde $a_i \in A_i$ e $|A_i| = p_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Por hipótese de indução, $|A| = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{n-1}$. Além disso, seja $B = A_n$ um conjunto com p_n elementos, ou seja, $|B| = |A_n| = p_n$. Observemos que a n-upla $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n)$ consiste de uma sequência $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ e um elemento $a_n \in A_n$. Portanto, pelo Lema 2 e pela hipótese de indução, o número de sequências do tipo $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ é

$$(p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{n-1}) \cdot p_n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{n-1} \cdot p_n.$$

Segue então que o teorema é válido para todo $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$.

∎

Apesar do princípio multiplicativo nos fornecer um instrumento básico para a Combinatória, sua aplicação direta na resolução de problemas pode às vezes ser trabalhosa. Nesse sentido, vamos definir alguns modos de formar agrupamentos e, usando uma notação simplificada, deduzir fórmulas que permitam a contagem desses agrupamentos como consequências do princípio multiplicativo.

3.3.2 Arranjos Simples

Definição 2. Seja X um conjunto com n elementos, ou seja, $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Chamamos de *arranjo simples* dos n elementos tomados r a r $(1 \leq r \leq n)$ a qualquer r-upla formada com elementos de X, todos distintos. Denotamos por $A_{n,r}$, o número de arranjos de n elementos tomados r a r.

Teorema 3. Seja X o conjunto $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. O número de arranjos simples de n elementos tomados r a r, com $r \leq n$ é dado por

$$A_{n,r} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1).$$

Prova. De fato, consideremos os n elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e as r posições $p_1, p_2, \ldots, p_r$. O número de todos os arranjos dos n elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tomados r a r é igual ao número de maneiras possíveis de se ocupar com esses n elementos as r posições $p_1, p_2, \ldots, p_r$. Assim sendo, para ocupar a posição p_1 temos n maneiras, a posição p_2 temos $n-1$ maneiras, seja qual for a escolha da primeira posição, e assim sucessivamente, até chegarmos na posição p_r, onde teremos $n-(r-1)$ maneiras de escolha. Portanto, pelo princípio multiplicativo, o número de arranjos de n elementos tomados r a r será $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1)$.

∎

3.3.3 Permutações Simples

Definição 3. Seja X um conjunto com n elementos, ou seja, $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Chamamos de *permutação simples* dos n elementos de X, a todo arranjo em que $r = n$. Denotamos por P_n, o número de permutações dos n elementos distintos.

Teorema 4. Seja X o conjunto $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. O número de permutações dos n elementos de X é dado por

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1.$$

Prova. De fato, pelo Teorema 3, temos que $P_n = A_{n,n}$. Logo,

$$\begin{aligned} P_n &= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-n+1) \\ &= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1. \end{aligned}$$

∎

3.3.4 Fatorial de um número natural n

Com o intuito de simplificar as fórmulas do número de arranjos e do número de permutações, assim como outras que iremos apresentar, vamos definir o símbolo fatorial.

Definição 4. Seja n um número inteiro não negativo. Definimos *fatorial de n*, e indicamos por $n!$, por meio da relação:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1, \quad n \geq 2$$

Por definição temos ainda que $0! = 1$ e $1! = 1$.

Assim sendo, podemos escrever as fórmulas do número de arranjos e do número de permutações utilizando a notação fatorial. De fato,

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1 = n!.$$

Agora, se multiplicarmos $A_{n,r} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1)$ por $\dfrac{(n-r)\cdot(n-r-1)\cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{(n-r)\cdot(n-r-1)\cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}$, obteremos

$$A_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Em particular $P_0 = 1$, já que $0! = 1$. Além disso, $A_{n,0} = 1$ e $A_{0,0} = 1$.

3.3.5 Combinações Simples

Definição 5. Seja X um conjunto com n elementos, ou seja, $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Chamamos de *combinações simples* dos n elementos tomados r a r, aos subconjuntos de X constituídos de r elementos. Denotamos por $C_{n,r}$ ou $\binom{n}{r}$, o número de combinações dos n elementos tomados r a r.

Teorema 5. Seja X o conjunto $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. O número de combinações simples dos n elementos tomados r a r, com $0 \leq r \leq n$, é dado por

$$A_{n,r} = r!\binom{n}{r},$$

ou seja,

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}.$$

Prova. Tomemos uma combinação, digamos que seja $A_1 = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_r\}$. Se permutarmos os elementos de A_1, obteremos $r!$ arranjos. Se tomarmos outra combinação, digamos $A_2 = \{a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{r+1}\}$, permutando os elementos de A_2, obteremos outros $r!$ arranjos. Chamemos de x o número de combinações, ou seja, $x = \binom{n}{r}$ e suponhamos formadas todas as combinações dos n elementos tomados r a r. Consideremos que sejam $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_x$. Cada combinação A_i dá origem a $r!$ arranjos. Chamemos de B_i o conjunto dos arranjos gerados pelos elementos de A_i. Dai, temos a seguinte correspondência:

$$\begin{array}{c} A_1 \to B_1 \\ A_2 \to B_2 \\ \vdots \\ A_x \to B_x \end{array}$$

Assim sendo, verifiquemos que:

1. $B_i \cap B_j = \varnothing$ para $i \neq j$;
2. $\bigcup_{i=1}^{x} B_i = B$, em que B é o conjunto de arranjos dos n elementos de X tomados r a r.

De fato:

1. Se $B_i \cap B_j \neq \varnothing$ para $i \neq j$, então existiria um arranjo que pertenceria a B_i e B_j simultaneamente. Tomando os elementos desse arranjo, obteríamos que coincidiria com A_i e A_j e, portanto, $A_i = A_j$. Isto é absurdo, pois quando construímos todas as combinações, $A_i \neq A_j$ para $i \neq j$. Portanto, $B_i \cap B_j = \varnothing$.

2. Seja a um arranjo tal que $a \in \bigcup_{i=1}^{x} B_i$, então $a \in B_i$ para algum $i = \{1, 2, \ldots, x\}$ e, evidentemente, $a \in B$. Daí, temos que $\bigcup_{i=1}^{x} B_i \subset B$. Por outro lado, seja a um arranjo tal que $a \in B$. Se tomarmos os elementos desse arranjo a, obteremos uma das combinações, digamos A_i. Ora, como A_i gera o conjunto dos arranjos B_i, então $a \in B_i$ e, portanto, $a \in \bigcup_{i=1}^{x} B_i$. Assim sendo, $B \subset \bigcup_{i=1}^{x} B_i$. Portanto, $\bigcup_{i=1}^{x} B_i = B$.

Pelo princípio aditivo, temos que:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{x} B_i\right| = |B| \Rightarrow |B_1| + |B_2| + |B_3| + \cdots + |B_x| = |B|$$

$$\underbrace{r! + r! + r! + \cdots + r!}_{x\ vezes} = \frac{n!}{(n-r)!} \Rightarrow x \cdot r! = \frac{n!}{(n-r)!} \Rightarrow$$

$$x = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

Como $x = \binom{n}{r}$, logo $\binom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$.

■

3.3.6 Permutações Circulares

Definição 6. Consideremos n elementos distintos dispostos ao redor de um círculo. Chamamos de *permutação circular* dos n elementos a cada disposição possível. Além disso, duas permutações circulares são consideradas equivalentes se, e somente se, uma pode ser obtida a partir da outra por meio de uma rotação. Denotamos por $(PC)_n$, o número de permutações circulares de n elementos.

Teorema 6. O número de permutações circulares de n elementos distintos é dado por

$$(PC)_n = (n-1)!.$$

Antes de provarmos o Teorema 6, verifiquemos o resultado desse teorema para o caso $n = 3$. Notemos que, existem $P_3 = 3! = 6$ modos de colocar 3 elementos em 3 lugares. No entanto, de acordo com a Figura 11, as três primeiras disposições coincidem por rotação no sentido anti-horário, ocorrendo o mesmo com as três últimas, de modo que $(PC)_3 = 2$.

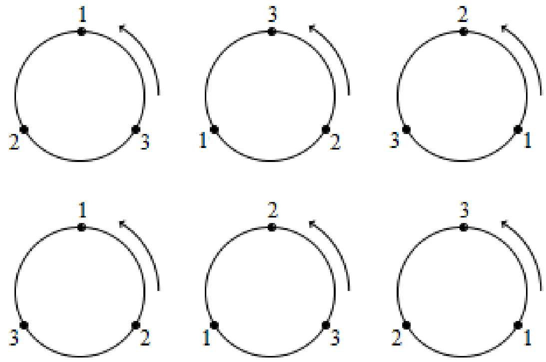

Figura 11: Elementos em torno de um círculo

Observemos que nas permutações simples importam os lugares que os elementos ocupam ao passo que nas permutações circulares o que importa é apenas a posição relativa dos objetos entre si, a menos de rotação. Nos três primeiros círculos, 1 precede 2, que precede 3, que precede 1; portanto, a posição relativa desses elementos é a mesma. Da mesma forma, nos três últimos círculos, 1 precede 3, que precede 2, que precede 1; portanto, a posição relativa desses elementos também é a mesma.

Podemos então, provar o Teorema 6 de dois modos:

Prova 1. De fato, se não considerarmos equivalentes disposições que possam coincidir por rotação, teríamos $n!$ disposições. Considerando a equivalência, cada permutação circular é gerada por n disposições. Logo, $(PC)_n = \dfrac{n!}{n} = (n-1)!$.

■

Prova 2. De fato, como o que importa é a posição relativa dos elementos, a menos de rotação, há 1 modo de colocar o 1º elemento no círculo; há 1 modo de colocar o 2º elemento (ele será o elemento imediatamente após o primeiro); há 2 modos de colocar o 3º elemento (imediatamente após o 1º ou imediatamente após o 2º); há 3 modos de colocar o 4º elemento (imediatamente após o 1º ou imediatamente após o 2º ou imediatamente após o 3º) ...; há $(n-1)$ modos de colocar o n-ésimo e último elemento. Logo, pelo princípio multiplicativo, $(PC)_n = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) = (n-1)!$.

■

3.3.7 Arranjos com repetição

Definição 7. Seja X um conjunto com n elementos, ou seja, $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Chamamos *arranjo com repetição* dos n elementos, tomados r a r, toda r-upla ordenada formada com elementos de X não necessariamente distintos. Denotemos por $(AR)_{n,r}$, o número de arranjos com repetição de n elementos tomados r a r.

Teorema 7. Seja X o conjunto $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. O número de arranjos com repetição dos n elementos de X tomados r a r $(r \geq 1)$ é dado por

$$(AR)_{n,r} = \underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{r\ vezes} = n^r.$$

Prova. De fato, consideremos os n elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e as r posições $p_1, p_2, \ldots, p_r$. Notemos que, cada arranjo com repetição é uma sequência ordenada de r elementos, em que cada elemento pertence a X. Assim sendo, para ocupar a posição p_1 da sequência temos n maneiras; para a posição p_2 temos n maneiras...; para a posição p_r temos n maneiras. Portanto, pelo princípio multiplicativo, temos:

$$(AR)_{n,r} = \underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{r\ vezes} = n^r.$$

■

3.3.8 Permutações com repetição

Definição 8. Consideremos n_1 elementos iguais a a_1, n_2 iguais a a_2, n_3 iguais a a_3, ..., n_r iguais a a_r, tais que $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_r = n$. Cada agrupamento ordenado de todos esses n elementos chama-se *permutação com repetição* dos n elementos e seu número é denotado por $P_n^{n_1, n_2, n_3, \ldots, n_r}$.

Teorema 8. Sejam dados n elementos, dos quais n_1 elementos são iguais a um tipo 1, n_2 elementos são iguais a um tipo 2, ..., n_r elementos são iguais a um tipo r, tais que $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_r = n$. Então o número de permutações com repetição desses n elementos é igual a

$$P_n^{n_1, n_2, n_3, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! n_3! \ldots n_r!}.$$

Prova. Sejam n_1 elementos iguais a a_1 (tipo 1), n_2 iguais a a_2 (tipo 2), n_3 iguais a a_3 (tipo 3), ..., n_r iguais a a_r (tipo r). Queremos determinar o número de permutações com repetição desses n elementos. Notemos que existem n lugares, e queremos colocar exatamente um dos n elementos em cada um desses lugares. Primeiro, precisamos decidir quais são os lugares a serem ocupados pelos a_1's. Como existem n_1 elementos iguais a a_1, devemos escolher um grupo de n_1 lugares a partir dos n lugares disponíveis. Podemos fazer isso de C_{n,n_1} maneiras. Agora, decidiremos quais são os lugares a serem ocupados pelos a_2's. Notemos que restaram $n - n_1$ lugares, donde, temos que escolher n_2 desses lugares. Isto poder ser feito de C_{n-n_1,n_2} maneiras. Desse modo, existem $C_{n-n_1-n_2,n_3}$ maneiras de escolher os lugares para os a_3's. Continuando o mesmo processo e aplicando o princípio multiplicativo, teremos que o número de permutações dos n elementos dados será

$$C_{n,n_1} \cdot C_{n-n_1,n_2} \cdot C_{n-n_1-n_2,n_3} \cdot \ldots \cdot C_{n-n_1-n_2-\ldots-n_{r-1},n_r}.$$

Usando o Teorema 5, e usando o fato de que $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_r = n$, obtemos

$$P_n^{n_1,n_2,n_3,\ldots,n_r} = \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\ldots n_r!0!} = \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\ldots n_r!}.$$

■

3.3.9 Combinações com repetição

Definição 9. Dado um conjunto X, com n elementos, chamamos de *combinação completa* ou *combinação com repetição* dos n elementos, tomados r a r, cada um dos grupos que podem ser formados, contendo, com ou sem repetição, r elementos de X. Denotamos por $CR_{n,r}$, o número de modos de escolher r elementos distintos ou não entre os n elementos distintos dados.

Teorema 9. O número de combinações de r elementos, distintos ou não, escolhidos entre n elementos distintos dados é

$$CR_{n,r} = \binom{n+r-1}{r}.$$

Prova. Consideremos o conjunto $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ e os inteiros não negtivos $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Sejam x_1 elementos iguais a a_1, x_2 iguais a a_2, ..., x_n iguais a a_n. Notemos que cada combinação será da forma

$$\underbrace{a_1a_1\ldots a_1}_{x_1 \text{ vezes}}\underbrace{a_2a_2\ldots a_2}_{x_2 \text{ vezes}}\ldots\underbrace{a_na_n\ldots a_n}_{x_n \text{ vezes}}$$

com $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$. Assim sendo, $CR_{n,r}$ pode ser interpretado como sendo o número de soluções inteiras não negativas da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$. Indiquemos o símbolo $\bullet$ como sendo uma unidade no valor de cada incógnita e o símbolo $|$ para separar duas incógnitas. Assim sendo, cada solução da equação é uma permutação de r símbolos $\bullet$ e $(n-1)$ símbolos $|$ (precisamos de $(n-1)$ barras para dividir r pontos em n partes). Vejamos o esquema abaixo:

$$\bullet\bullet \mid \bullet\bullet \ldots \bullet \mid \bullet \ldots \mid \ldots$$

Usando o Teorema 8, temos que o número de permutações (soluções da equação) será

$$CR_{n,r} = P_{r+n-1}^{r,n-1} = \frac{(n+r-1)!}{r!\,(n-1)!} = \binom{n+r-1}{r}.$$

■

4 Procedimentos Metodológicos

4.1 Metodologia de aplicação

4.1.1 Contexto

A pesquisa foi realizada em uma instituição estadual de ensino de nível fundamental e médio, chamada Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio João Mattos, localizada na Rua Almirante Rubin, 1014, no Bairro Montese, no município de Fortaleza, estado do Ceará. A escola é mantida pelo Governo do Estado e foi criada conforme o Decreto Nº 11.493, publicado no Diário Oficial do Estado, de 30/10/75, sendo ligada administrativa e tecnicamente à Secretaria de Educação do Estado do Ceará (SEDUC). Funciona durante os três turnos em regime regular, tendo ao todo 27 turmas, sendo 2 turmas de 8º ano e 3 turmas de 9º ano no Ensino Fundamental. Já no Ensino Médio, a escola possui 8 turmas de 1º ano, 7 turmas de 2º ano e 7 turmas de 3º ano.

Estruturalmente, a escola possui 11 salas de aulas, 3 laboratórios (ciências, informática e humanas), 1 biblioteca, 1 refeitório, secretaria, sala de professores, sala de planejamento, 1 sala de vídeo, coordenação, 2 quadras de esportes. Além disso, no seu quadro funcional há 51 professores, 2 coordenadoras, 1 diretora, 1 secretária, 1 assistente administrativa financeira, 5 auxiliares de serviço, 2 vigias, 1 porteiro e aproximadamente 900 alunos.

4.1.2 Participantes

Participaram desta pesquisa 20 alunos, com idades entre 16 e 18 anos, cursando a 3ª série do ensino médio. Esses alunos foram escolhidos de forma aleatória entre 5 turmas, sendo 3 turmas do turno da manhã e 2 do turno da tarde, os quais foram divididos em dois grupos, *Grupo Experimental* e *Grupo de Controle*, cada um com 10 alunos.

4.1.3 Condução

O estudo foi realizado em dois momentos, para sermos mais específicos, em dois turnos (manhã e tarde). No primeiro momento trabalhamos pelo turno da manhã com os 10 alunos do grupo de controle, no qual aplicamos a abordagem tradicional de ensino. Os alunos desse grupo foram colocados em sala convencional, onde utilizamos apenas, como recursos didáticos, o pincel e o quadro branco.

A aula que foi ministrada para o grupo de controle teve as mesmas definições e exemplos dos OAs que foram utilizados na abordagem diferenciada por recursos digitais, pois queríamos diferenciar as duas abordagens apenas pelos recursos utilizados e com isso evitar que um grupo tivesse algum tipo de vantagem ou desvantagem sobre o outro.

Começamos a aula explicando o assunto sobre Arranjos Simples, em seguida sobre Permutações Simples e por fim sobre Combinações Simples. Como mencionamos anteriormente, as definições e os exemplos que foram discutidos em cada assunto eram os mesmos dos OAs. Resolvemos alguns exemplos e sempre que necessários fazíamos alguns questionamentos. Além disso, durante a aula, ressaltamos que esses assuntos estavam diretamente ligados ao Princípio Multiplicativo, e com isso resolvemos os exemplos propostos utilizando fórmulas e também esse princípio.

Após terminarmos a explanação desses assuntos, que durou cerca de uma hora, pedimos aos alunos que respondessem um questionário socioeconômico. Em seguida, foram aplicados para os alunos um teste contendo oito questões objetivas, cada uma com 5 alternativas, sobre o tema abordado. Este teste tinha duas questões de permutação simples, três de arranjo simples e três de combinação simples. Foi dada uma hora para a realização do teste. Quando os alunos terminaram, agradecemos pela colaboração na pesquisa.

No segundo momento, trabalhamos pelo turno da tarde com os 10 alunos grupo experimental. Para esse grupo, a abordagem de ensino foi diferenciada, onde utilizamos como suporte pedagógico OAs. A proposta é que trabalhemos de uma forma diferenciada, onde o uso de recursos digitais, nesse caso o computador, cause um efeito mais satisfatório do que na abordagem tradicional.

Os alunos do grupo experimental foram levados para o laboratório de informática, porém aconteceram alguns imprevistos e não pudemos realizar as atividades no laboratório. Diante disso, pedimos permissão ao núcleo gestor da escola para que as atividades fossem realizadas na sala de planejamento e com isso, a sala ficou reservada para a pesquisa durante duas horas e meia. Como a escola possui notebooks, pedimos ao professor do Laboratório de Informática que nos cedesse 10 notebooks.

Depois que organizamos a sala, chamamos os alunos do grupo experimental e cada aluno ficou com um notebook e o professor ficou em um computador, que já estava na sala, a fim de acompanhar as atividades com os alunos. Todos os notebooks estavam ligados, pedimos que os alunos navegassem na internet e entrassem nos endereços dos OAs. Todos puderam realizar as atividades propostas pelos objetos.

Seguindo a ordem dos assuntos expostos no grupo de controle, os alunos do grupo experimental acessaram primeiro o objeto relacionado ao assunto de Arranjos Simples e com isso visitaram a cidade dos Arranjos. Logo em seguida, todos entraram no objeto relacionado à Permutação Simples e visitaram a cidade das Permutações. E por fim, entraram no objeto relacionado à Combinação Simples, visitando a cidade das Combinações. Pedimos aos alunos que navegassem pelos objetos de acordo com a ordem estabelecida, passando pelas definições e que realizassem as atividades propostas por cada objeto. Ao visitar cada cidade, o aluno era estimulado pelo objeto a fazer algumas simulações de atividades presentes no seu dia-a-dia, como por exemplo, fazer senhas para a conta de um banco e fazer apostas numa loteria. Ressaltamos ainda que, durante a realização das atividades, discutimos e resolvemos os exemplos propostos pelos objetos, assim como foi feito no grupo de controle.

Depois que as atividades foram realizadas através do uso dos OAs, durando uma hora e vinte minutos, pedimos que os alunos respondessem o mesmo questionário socioeconômico aplicado ao grupo de controle. Logo em seguida, foi aplicado o teste para os alunos, sendo que esse teste foi o mesmo aplicado ao outro grupo. Assim como no grupo de controle, o tempo dado aos alunos para a realização do teste foi de uma hora. Da mesma forma como foi feito no grupo de controle, quando os alunos terminaram o teste, agradecemos pela colaboração na pesquisa.

Os testes aplicados para os dois grupos foram elaborados pelo autor da pesquisa e durante a aplicação desse teste não foi permitido o uso de calculadoras, computadores, etc.

5 Análise dos Resultados

5.1 Resultados

A seguir, faremos a análise dos resultados obtidos de cada questão com seu enunciado. Além disso, apresentaremos um breve comentário sobre a questão a ser analisada, seguido de um gráfico para melhor compreensão dos resultados obtidos.

Primeira questão: Em relação aos anagramas da palavra CONTAR são feitas as seguintes afirmações:

I. O número total deles é 720.

II. O número dos que terminam com a letra A é 120.

III. O número dos que começam com CO é 24.

(A) apenas a afirmação I é verdadeira.
(B) apenas a afirmação II é verdadeira.
(C) apenas a afirmação III é verdadeira.
(D) apenas as afirmações I e II são verdadeiras.
(E) todas as afirmações são verdadeiras.

A primeira questão é relacionada ao assunto de permutação. Os alunos teriam que verificar a veracidade dos itens I, II e III que diziam respeito aos anagramas da palavra CONTAR. Essa questão poderia ter sido resolvida utilizando a fórmula, ou seja, como a palavra

CONTAR possui seis letras distintas, temos que a quantidade de anagramas dessa palavra será $P_6 = 6! = 720$. A quantidade de anagramas que terminam com a letra A será $P_5 = 5! = 120$, visto que a letra A estará fixada no final de cada anagrama formado. E por fim, o número total de anagramas que começam com CO será $P_4 = 4! = 24$, pois as letras CO estarão fixas, restando assim quatro letras para se permutarem. Logo a alternativa correta é o item E. Alguns alunos resolveram essa questão utilizando o princípio multiplicativo. Como podemos perceber na Figura 12, 90% do grupo experimental e 50% do grupo de controle assinalaram a alternativa correta, ou seja, quase todos os alunos acertaram a questão. Além disso, nenhum aluno deixou a questão em branco.

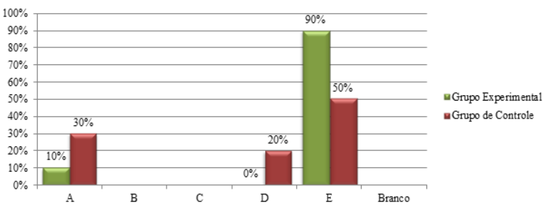

Figura 12: Primeira questão do teste

Segunda questão: Cinco pessoas, entre elas Larissa e Daiana, devem ficar em fila. De quantas formas isso poderá ser feito, se Larissa e Daiana devem ficar sempre juntas?

(A) 6 (B) 10 (C) 12 (D) 24 (E) 48

A segunda questão também se refere ao assunto de permutação. Essa questão exigia que o aluno utilizasse muito mais que a fórmula, onde ele teria que perceber que Larissa e Daiana teriam que ser pensadas com uma única "pessoa" a se permutar com as outras três, e, além disso, Larissa e Daiane poderiam se permutar entre si. Desse modo, a quantidade de maneiras que as cinco pessoas devem ficar em fila com a restrição que Larissa e Daiana devem ficar sempre juntas será igual a $P_4 \cdot P_2 = 4! \cdot 2! = 48$. Logo a alternativa correta é o item E. Conforme a Figura 13, podemos notar que apenas um aluno acertou essa questão e pertencia ao grupo experimental. Além disso, todos os alunos do grupo de controle tentaram resolver a questão e apenas um aluno, que pertencia ao grupo experimental, deixou a questão em branco.

Terceira questão: Com as letras A, B, C e os algarismos 2, 4, 6, 7, formam-se todos os códigos possíveis, constituído de duas letras distintas, seguidas de três algarismos distintos. Qual é o total de códigos?

(A) 30 (B) 54 (C) 120 (D) 144 (E) 200

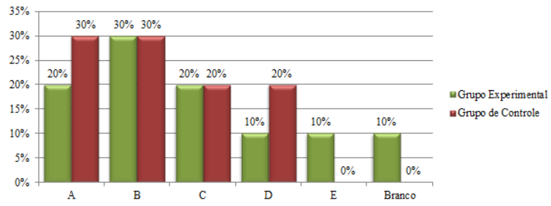

Figura 13: Segunda questão do teste

A terceira questão refere-se ao assunto de arranjo simples. Os alunos que resolveram e acertaram essa questão utilizaram apenas o princípio multiplicativo, ou seja, como haviam três letras distintas e quatro algarismos distintos, para se formar um código com duas letras distintas seguidas de três algarismos distintos, bastava fazer a multiplicação $3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$ e teria um total de 144 códigos. O mesmo resultado também seria obtido com o uso da fórmula do arranjo simples, desde que, o aluno percebesse que a ordem dos elementos na formação de cada código é relevante, e com isso chegaria à resposta através da multiplicação $A_{3,2} \cdot A_{4,3}$. Portanto, a alternativa correta é o item D. De acordo com a Figura 14, 40% do grupo experimental e 30% do grupo de controle acertaram a questão. A segunda alternativa mais assinalada foi o item C, com 30% de ambos os grupos. Além disso, 4 alunos deixaram a questão em branco, sendo 2 alunos de cada grupo.

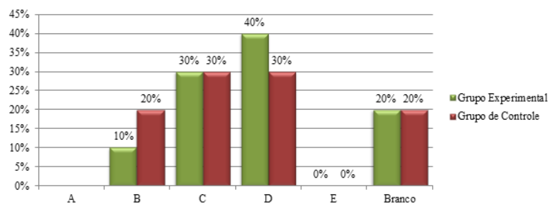

Figura 14: Terceira questão do teste

Quarta questão: Utilizando os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5, formam-se todos os números de quatro algarismos distintos. Qual é o total de números formados?

(A) 10 (B) 30 (C) 60 (D) 100 (E) 120

A quarta questão refere-se ao assunto de arranjo simples. Nessa questão, o aluno teria que perceber que a ordem dos números é importante, ou seja, se ele trocasse a posição dos números teria um número diferente, implicando em um problema de arranjo. Notemos que temos 5 números a disposição para formar os números de 4 algarismos distintos. Daí, utilizando a fórmula do arranjo simples, a resposta será $A_{5,4} = 120$. Logo a alternativa correta é o item E. Conforme a Figura 15, a maioria dos alunos acertaram a questão, sendo que foi 80% do grupo experimental contra 70% do grupo de controle. Além disso, apenas dois alunos deixaram de responder a questão, um de cada grupo.

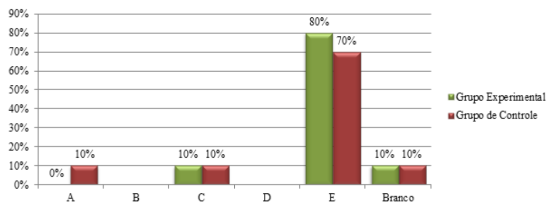

Figura 15: Quarta questão do teste

Quinta questão: Um condomínio tem quatro pessoas que estão participando de uma eleição. Sabendo-se que dentre as quatro pessoas, três serão escolhidas para os cargos de síndico, subsíndico e tesoureiro, de quantas maneiras distintas pode ser o resultado dessa eleição?

(A) 4 (B) 8 (C) 16 (D) 20 (E) 24

A quinta questão também estava relacionada ao assunto de arranjo simples. O aluno teria que perceber que essa questão se tratava de um problema de arranjo, já que se ele trocasse a posição das pessoas dentro de um determinado agrupamento, formaria um agrupamento diferente do anterior, visto que, essas pessoas mudariam de cargos. Assim sendo, como são 4 pessoas disponíveis e queremos escolher 3 para os cargos mencionados na questão, temos que a resposta será $A_{4,3} = 24$. Logo a alternativa correta é o item E. De acordo com a Figura 16, podemos notar que, 90% do grupo experimental acertaram a questão contra 30% do grupo de controle. Apenas um aluno, do grupo de controle, deixou a questão em branco.

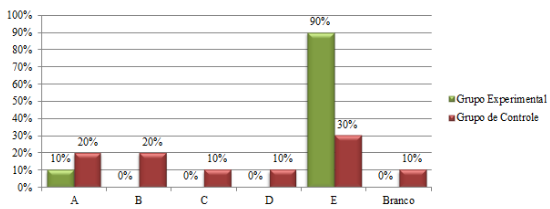

Figura 16: Quinta questão do teste

Sexta questão: De um grupo de 3 homens e 5 mulheres, de quantas maneiras diferentes pode-se formar uma comissão de 4 pessoas?

(A) 12 (B) 60 (C) 70 (D) 720 (E) 1.680

A sexta questão é referente ao assunto de combinação simples. Nessa questão, o aluno tinha que perceber que a ordem das pessoas dentro de cada comissão não é relevante, identificando que o problema era de combinação. Como havia um total de 8 pessoas, teríamos que escolher 4 dentre essas pessoas para formar uma comissão. Dessa forma, utilizando a fórmula da combinação simples, obteríamos $C_{8,4} = 70$ maneiras diferentes de formar uma comissão. Logo a alternativa correta é o item C. Pela Figura 17, podemos observar que, 40% do grupo experimental e 10% do grupo de controle marcaram a alternativa correta. Percebemos que 30% marcaram a alternativa E, pois identificaram o problema como sendo de arranjo simples e com isso obtendo 1.680 como resposta. Notemos também que, 40% do grupo experimental deixaram a questão em branco contra 20% do grupo de controle.

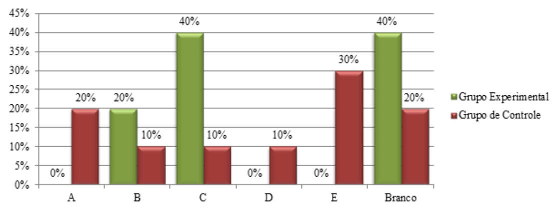

Figura 17: Sexta questão do teste

Sétima questão: Em uma sala há quatro alunos: Antônio, Bernardo, César e Daniel. Pretende-se escolher três, dentre esses alunos, para participar de um congresso. De quantas maneiras distintas poderá ser feita esta escolha?

(A) 4 (B) 10 (C) 16 (D) 24 (E) 32

A sétima questão refere-se ao assunto de combinação. Nessa questão, o aluno tinha que perceber que mudando a ordem das três pessoas dentro do grupo, não se altera o resultado do grupo, identificando que esse problema era de combinação. Dessa forma, como na sala tem quatro alunos e pretende-se escolher três, pela fórmula da combinação simples, temos $C_{4,3} = 4$ maneiras distintas de fazermos essa escolha. Logo a alternativa correta é o item A. De acordo com a Figura 18, a metade dos alunos acertou a questão, com 60% do grupo experimental contra 40% do grupo de controle. Observemos que 6 alunos, distribuídos entre os dois grupos, resolveram a questão como se fosse de arranjo, e com isso marcaram o item D. Além disso, nenhum aluno do grupo experimental deixou a questão em branca, mas 20% do grupo de controle deixaram de resolver a questão.

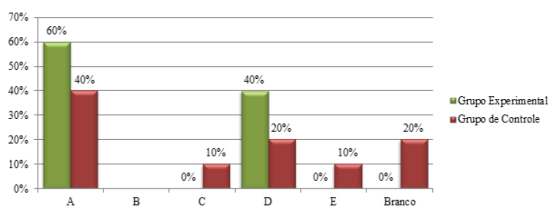

Figura 18: Sétima questão do teste

Oitava questão: Em uma sorveteria existem 10 sabores de sorvete. Um cliente dessa sorveteria pretende escolher 3 sabores distintos. De quantas maneiras diferentes esse cliente poderá realizar esta escolha?

(A) 30 (B) 100 (C) 120 (D) 400 (E) 720

A oitava questão é relacionada também ao assunto de combinação. Nessa questão, o aluno tinha que perceber que ordem diferente de três sabores escolhidos não formaria outro grupo, identificando que esse problema era de combinação. Assim sendo, como a sorveteria tem a disposição 10 sabores de sorvete e o cliente pretende escolher três sabores distintos, pela fórmula da combinação simples temos $C_{10,3} = 120$ maneiras diferentes desse cliente realizar esta escolha. Logo a alternativa correta é o item C. Conforme a Figura 19, podemos notar que, 60% do grupo experimental e 30% do grupo de controle acertaram a questão. Observemos que, 4 alunos, distribuídos entre os dois grupos, assinalaram o item E como se o problema fosse de arranjo. Além disso, 4 alunos deixaram a questão em branco, sendo 10% do grupo experimental e 30% do grupo de controle.

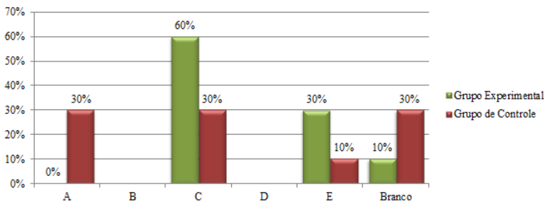

Figura 19: Oitava questão do teste

5.2 Análise comparativa

A Figura 20 mostra uma comparação dos resultados obtidos em cada questão e no geral entre os dois grupos, com o intuito de saber qual grupo teve melhor desempenho.

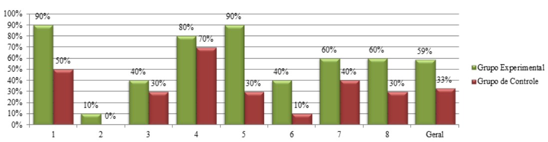

Figura 20: Análise comparativa do desempenho dos grupos experimental e de controle

Observemos que o grupo experimental teve um melhor desempenho em todas as questões, apesar do desempenho na segunda questão ter sido muito baixo. Notemos ainda que, no geral, o grupo de controle obteve cerca de 33% de acertos, enquanto que o grupo experimental obteve cerca de 59%, e com isso, levando uma boa vantagem com relação ao grupo de controle, o que nos permitiu concluir que o grupo experimental teve um desempenho superior ao grupo de controle.

6 Conclusões

Quando começamos o estudo, tínhamos um questionamento bem relevante sobre o assunto de Combinatória, ou seja, queríamos saber se o uso de OAs tornariam a aprendizagem dos alunos mais significativa. Os resultados obtidos nessa pesquisa mostraram que, os alunos do grupo experimental que tiveram uma aula diferenciada, utilizando OAs, acertaram 59% do teste, enquanto que o grupo de controle, composto pelos alunos que tiveram uma aula com método tradicional, acertaram 33% do teste.

Com a análise individual de cada questão, podemos perceber que em todas as questões, o grupo experimental teve rendimento superior ao grupo de controle. Observamos que o menor rendimento do grupo experimental ocorreu na segunda questão, onde apenas um aluno acertou a questão. Ressaltamos ainda, que em cinco questões o desempenho do grupo experimental foi superior a 50%, enquanto que o grupo de controle conseguiu, apenas em uma questão, ter rendimento superior a 50%, mais especificamente, com um índice de 70% na quarta questão.

O aluno que obteve o melhor rendimento no teste, acertando todas as questões, pertencia ao grupo experimental. Esse aluno afirmou que trabalha e estuda; que estudou a maior parte em escola pública; nunca repetiu uma série e considera bom o seu conhecimento em matemática. Dos quatro alunos que acertaram apenas uma questão, obtendo o menor rendimento no teste, três pertenciam ao grupo de controle.

Fazendo ainda o cruzamento das informações dadas pelos participantes no questionário socioeconômico com os resultados obtidos, constatamos que, tanto os alunos do grupo de controle como os do grupo experimental poderiam ter tido um rendimento melhor, visto que, 17 alunos declararam ser bons em Matemática e que dos 20 participantes, apenas um trabalha, o restante só estudam. Agora, o que realmente deve ter acontecido para o baixo rendimento desses alunos? Será que não assimilaram o assunto? Será que não estão estudando? Observando as resoluções desses alunos no teste, percebemos que muitos deles até entenderam o assunto, porém, quando se depararam com operações básicas, principalmente multiplicação e divisão, deixaram de acertar muitas questões por sentirem dificuldades em trabalhar com essas operações. Com isso, podemos perceber que há uma falta de conhecimento relacionado a séries anteriores. Nesse sentido, é necessário que o ensino seja concebido como um processo de continuidade onde o aluno possa construir novos conceitos a partir de conceitos anteriormente trabalhados, pois é através de conhecimentos prévios que um novo conhecimento torna-se mais fácil de ser construído. Outro fato que pode ter ocorrido é que esses alunos talvez não estejam estudando, embora digam que apenas estudam. Nesse sentido, é preciso que haja um trabalho sistemático que envolva as escolas, as autoridades, as famílias, assim como, toda a sociedade, com o intuito de motivar esses alunos a estudarem e conscientiza-los para a importância da educação em suas vidas. Diante destas dificuldades detectadas nesse estudo, propomos aos professores de Matemática que, ao começar um determinado assunto, busquem fazer com seus alunos avaliações de conhecimentos prévios, visando diagnosticar possíveis dificuldades que os impedirão de progredir no processo de construção de novos conhecimentos, e que dentro do possível fosse feito um trabalho com esses alunos a fim de sanar tais dificuldades, proporcionando um melhor aprendizado.

Mesmo diante destas dificuldades, podemos concluir que o objetivo desse trabalho foi alcançado, uma vez que, através dos resultados obtidos e analisados, podemos perceber uma superioridade dos rendimentos dos alunos do grupo experimental sobre os alunos do grupo de controle. Desse modo, com a utilização de recursos tecnológicos interativos, a aprendizagem dos alunos se torna mais significativa, fato que levou os alunos que tiveram uma abordagem diferenciada, utilizando tais recursos, a obterem um melhor desempenho do que aqueles alunos que tiveram uma abordagem tradicional, onde foram usados, como recursos didáticos, apenas pincel e lousa.

Quanto à aplicação das atividades para o nosso estudo, não encontramos dificuldades em realiza-las, apesar das atividades com o grupo experimental não terem sido realizadas no laboratório de informática. Com relação à disponibilidade dos alunos para executarem as atividades propostas, também não tivemos problemas, já que todos os alunos que foram escolhidos aceitaram, sem resistência, participar do presente estudo.

É importante ressaltar que, aos professores que aplicarão essa atividade, comentem com os alunos um equívoco encontrado em uma das atividades do objeto de aprendizagem sobre arranjos. A atividade refere-se à confecção de placas de carros a partir de uma placa fixa contendo os algarismos 1, 2, 3, e 4, nesta ordem. A proposta da questão era que o aluno calculasse a quantidade de placas que poderiam ser formadas utilizando os algarismos da placa dada. Pelo que se pode notar nessa atividade, a resposta correta seria $A_{4,4} = 24$. O que acontece é que quando colocamos esse resultado no espaço da resposta e clicamos em OK, aparece uma resolução cuja resposta é $A_{10,4} = 5.040$, dando a entender que poderíamos utilizar os algarismos de 0 a 9.

Apesar desse estudo ter sido feito com alunos do 3º ano do Ensino Médio em forma de revisão, propomos que esta atividade seja realizada com alunos que estejam estudando Combinatória pela primeira vez, isto é, para alunos do 2º ano do Ensino Médio.

Nesse estudo, a avaliação do desempenho dos alunos utilizando OAs foi focada em uma pequena amostra, deixando assim, margens para estudos mais profundos, a fim de que possam contribuir para um ensino mais dinâmico nas aulas de matemática.

Referências

BACHX, G.C., POPPE, L.M.B., TAVARES, R.N.O. **Prelúdio à Análise Combinatória,** São Paulo: Nacional, 1975.

BIGGS, N. L. **The roots of combinatorics.** Revista Historia Mathematica, v. 6, 1979. p. 109-136.

BRUALDI, R. A. **Introductory Combinatorics.** 5th ed. USA: Pearson, 2009.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática; tradução:** Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.

HARIKI, S. **Conectar problemas: uma nova estratégia de resolução de problema combinatório.** Revista Educação e Matemática, n. 37, 1º trimestre de 1996 (Portugal).

HAZZAN, S. **Fundamentos da Matemática Elementar:** combinatória e probabilidade, v. 5. 6 ed. São Paulo: Atual, 1993.

KATZ, V. J. Combinatorics and Induction in Medieval Hebrew and Islamic Mathematics. In: **Vita Mathematica:** historical research and integration with teaching. USA: Mathematical Association of America, 1996.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **RIVED** (Rede Interativa Virtual da Educação). Disponível em: <http://rived.mec.gov.br/site_objeto_lis.php>. Acesso em: 31 jan. 2015.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **PCN+ ensino médio:** orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares da ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/SEMTEC, 2002.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. Secretária de Educação Básica Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais:** ensino médio. Brasília: MEC, 1999.

MORGADO, A. C. O., CARVALHO, J. B. P., CARVALHO, P. C. P., FERNANDEZ, P. **Análise Combinatória e Probabilidade.** Rio de Janeiro: SBM, 1991.

NASCIMENTO, A. C., MORAO, E. M. **Um projeto de colaboração Internacional na América Latina.** On-line: Disponível em: <http://rived.proinfo.mec.gov.br/artigos/rived.pdf>. Acesso em: 31 jan. 2015.

PESSOA, C. A. S.; BORBA, R. **O desenvolvimento do raciocínio combinatório na escolarização básica.** Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana, Recife, n.1, p.1- 22, 2010. Disponível em:<http://www.gente.eti.br/revistas/index.php/emteia/article/view/4>. Acesso em: 30 jan. 2015.

PIAGET, J., INHELDER, B. **A psicologia da criança.** Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 1995.

SAVIANI, D. **Escola e democracia.** 40. ed. Campinas: Autores Associados, 2008.

TRIVIÑOS, A. N. S. **Introdução à pesquisa em ciências sociais:** a pesquisa qualitativa em educação. 1. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

WILEY, D. **The instructional use of learning objects,** 2000. Disponível em: <http://reusability.org/read/>. Acesso em: 30 jan. 2015.

WILSON, R., WATKINS, J.J. **Combinatorics: Ancient and Modern.** UK: Oxford University Press, 2013.