

## **Análise de convergência do método GILTT para problemas em dispersão de poluentes na atmosfera**

Convergence analysis of the GILTT method for problems in pollutant dispersion in the atmosphere

Daniela Buske<sup>1</sup>, Cláudio Zen Petersen<sup>2</sup>, Regis Sperotto de Quadros<sup>3</sup>, Glênio Aguiar Gonçalves<sup>4</sup> e Juliana Ávila Contreira<sup>5</sup>

Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, PPGMMat, UFPel, Pelotas/RS/Brasil

<sup>1</sup> Doutor em Engenharia Mecânica, Instituto de Física e Matemática, danielabuske@gmail.com,

<sup>2</sup>Doutor em Engenharia Mecânica, Instituto de Física e Matemática,  
claudiopetersen@yahoo.com.br,

<sup>3</sup> Doutor em Matemática Aplicada, Instituto de Física e Matemática, quadros99@gmail.com,

<sup>4</sup> Doutor em Engenharia Mecânica, Instituto de Física e Matemática,  
gleniogoncalves@yahoo.com.br

<sup>5</sup> Mestranda em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática,  
julianacontreira@hotmail.com

### **Resumo**

*Neste trabalho, apresenta-se uma análise de convergência da técnica GILTT para problemas de dispersão de poluentes consolidando a solução do problema em representação analítica. Muitos foram os avanços da técnica GILTT ao longo dos últimos anos. A equação de advecção-difusão foi resolvida para os casos multidimensionais e aplicada a diversas situações, principalmente na dispersão de poluentes. O teorema de Cauchy-Kowalewsky garante a existência e unicidade de uma solução analítica para a equação de advecção-difusão. Neste trabalho, apresenta-se uma análise de convergência da técnica GILTT para problemas de dispersão de poluentes. Resultados numéricos são apresentados.*

**Palavras-chave:** Solução analítica, GILTT, análise da convergência

### **Abstract**

*In this paper, we present a convergence analysis of the GILTT method for pollutant dispersion problems consolidating the solution of the problem in analytical representation. There have been many advances in the GILTT technique over the past few years. The advection-diffusion equation was solved for the multidimensional case and applied to various situations, mainly in pollutant dispersion. The theorem of Cauchy-Kowalewsky guarantees the existence and uniqueness of an analytic solution for the advection-diffusion equation. In this paper, we present a convergence analysis for the GILTT method to pollutant dispersion problems. Numerical results are presented.*

**Keywords:** Analytical solution, GILTT, convergence analysis

## 1 Introduction

A modelagem matemática dos processos de dispersão é uma ferramenta indispensável na gestão ambiental, por ser capaz de incorporar e extrapolar as observações *in situ* das concentrações de poluentes, e por permitir, através de experimentos numéricos, conhecer diversas feições do transporte de poluição e auxiliar no planejamento e gerenciamento das atividades humanas que de alguma forma liberam resíduos para a atmosfera (Moreira; Tirabassi, 2004). Um bom modelo deve considerar: disponibilidade e escopo do conjunto de dados para verificação do mesmo; aproximação matemática e as limitações da solução proposta; e a complexidade da análise e as simplificações nos dados que podem ser suportadas sem que a acurácia seja perdida.

Modelos de difusão e transporte de poluentes atmosféricos podem estar fundamentados em técnicas mais simples e de rápida utilização, como os Gaussianos, ou em algoritmos de maior complexidade, como os esquemas numéricos baseados na teoria-K (ou do transporte por gradiente) (Moreira et al., 2006).

Os modelos Gaussianos possuem algumas vantagens que os fazem ser bastante utilizados, como por exemplo, sua concordância com dados experimentais, seu baixo custo computacional e sua consistência com a natureza aleatória da turbulência (Hanna; Briggs; Hosker Jr., 1982). Entretanto, os modelos Gaussianos não conseguem simular com precisão condições de turbulência não homogênea; a teoria-K, por outro lado, mostra-se eficiente para diversas condições meteorológicas, mas possui um custo computacional mais elevado, além de assumir riscos de erros nos cálculos de advecção.

Uma das maiores dificuldades/limitações no que se refere a modelagem computacional de processos atmosféricos é o custo computacional. Essa demanda por vezes requer a utilização de supercomputadores, com alto poder de processamento.

Nesse contexto, surge o desafio da elaboração de soluções analíticas ou semi-analíticas para os processos de dispersão atmosférica. Esses métodos conseguem representar com elevado

grau de precisão tais processos, e tem a vantagem de o fazerem a um relativamente baixo custo computacional, o que os torna particularmente interessantes, sobretudo para fins práticos (Carvalho; Moreira, 2007). Desses métodos, os principais empregados em modelagem da dispersão atmosférica são: ADMM (Advection Diffusion Multilayer Model) (Moreira et al., 2006), a GITT (Generalized Integral Transform Technique) (Cotta and Mikhailov, 1997), a GIADMT (Generalized Integral Advection Diffusion Multilayer Technique) (Costa et al., 2006), e o método GILTT (Generalized Integral Laplace Transform Technique) (Moreira et al., 2009). Todas essas técnicas empregam a equação de advecção-difusão em um referencial Euleriano, resolvendo-a analítica ou semianaliticamente através de transformadas integrais. O interesse deste trabalho é o método GILTT.

A GITT (Cotta and Mikhailov, 1997) é uma técnica de transformação integral que se baseia em expandir a função de várias variáveis (no caso de dispersão atmosférica, a concentração de poluente) em uma série cuja base são as autofunções do problema auxiliar de Sturm-Liouville. Este problema é selecionado de acordo com as condições de fronteira do problema original. Na expansão, aplica-se a transformação integral, que utiliza a propriedade de ortogonalidade das autofunções. A seguir, resolve-se numericamente o sistema de equações transformadas (Wortmann, 2005).

A GILTT é considerada um avanço na GITT, no que se refere a solução do problema transformado. A ideia reside na aplicação da Transformada de Laplace, juntamente com a diagonalização matricial, cujo emprego reduz consideravelmente o custo computacional na obtenção da solução. O procedimento geral para a simulação da dispersão de contaminantes segue as seguintes etapas: expansão da concentração do poluente em séries associadas as autofunções de um problema auxiliar, a substituição da expansão na equação de advecção-difusão e integração, e a resolução via Transformada de Laplace da matriz correspondente ao sistema de equações diferenciais ordinárias para, então, obter a

solução do problema inicial (Moreira et al., 2009). Algumas particularidades e vantagens da GILTT foram salientadas por Wortmann (2005): não há necessidade de discretização do domínio e não há restrições ao coeficiente de difusão turbulenta ou ao perfil vertical do vento.

Muitos foram os avanços da técnica GILTT ao longo dos últimos anos. A equação de advecção-difusão foi resolvida para os casos multidimensionais e aplicada a diversas situações, principalmente na dispersão de poluentes (Moreira et al., 2009; Buske et al., 2012). O teorema de Cauchy-Kowalewsky garante a existência e unicidade de uma solução analítica para a equação de advecção-difusão (Courant e Hilbert, 1989). Neste trabalho, apresenta-se uma análise de convergência da técnica GILTT para problemas de dispersão de poluentes consolidando a solução do problema em representação analítica.

## 2 O método GILTT

A seguir são mostrados os passos básicos para a obtenção da solução de um problema unidimensional dependente do tempo pela técnica da GILTT. Para problemas multidimensionais, o procedimento é análogo. A análise restringe-se ao sistema de coordenadas cartesianas, mas pode-se aplicar a qualquer sistema de coordenadas.

Partindo da equação de advecção-difusão unidimensional dependente do tempo:

$$\frac{\partial c(z,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z \frac{\partial c(z,t)}{\partial z} \right), \quad (1)$$

para  $0 < z < h$  e  $t > 0$ , sujeito as seguintes condições de contorno

$$K_z \frac{\partial c(z,t)}{\partial z} = 0 \quad \text{em } z=0 \text{ e } z=h \quad (1.a)$$

e uma fonte com emissão  $Q$  na altura  $H_s$ :

$$c(z,0) = Q\delta(z - H_s) \quad \text{em } t=0 \quad (1b)$$

onde  $c(z,t)$  representa a concentração do poluente e  $h$  é a altura da camada limite atmosférica. O termo difusivo na Eq. (1) é reescrito usando a regra da cadeia. Este procedimento foi usado por Wortmann (2005) e permite a simplificação da escolha do problema auxiliar. Então pode-se escrever:

$$\frac{\partial c(z,t)}{\partial t} = K_z \frac{\partial^2 c(z,t)}{\partial z^2} + K'_z \frac{\partial c(z,t)}{\partial z}. \quad (2)$$

O primeiro passo é expandir a variável  $c(z,t)$  em uma base adequada. Para se determinar esta base, o operador  $A$  é reescrito de forma a se escolher um operador  $L$  associado ao problema de Sturm-Liouville da forma:

$$\Psi_n''(z) + \lambda_n^2 \Psi_n(z) = 0 \quad \text{em } 0 < z < h \quad (3a)$$

$$\Psi_n'(z) = 0 \quad \text{em } z = 0, h \quad (3b)$$

que tem uma conhecida solução dado por  $\Psi_n(z) = \cos(\lambda_n z)$ , onde  $\lambda_n = n\pi/h$  ( $n=0,1,2,\dots$ ). O problema (3) é chamado de problema de Sturm-Liouville regular e é a forma geral dos chamados problemas auxiliares na teoria da GILTT. As funções  $\Psi_n(z)$  e os valores  $\lambda_n$  são conhecidos, respectivamente, como as autofunções e autovalores do operador  $L$ . Elas formam a base para o espaço onde o operador  $L$  está contido, ou seja, as autofunções  $\Psi_n(z)$  formam em  $L^2[0,h]$  uma base completa, enquanto os autovalores formam uma sequência não-negativa ilimitada da forma:  $0 \leq \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$  cuja ortogonalidade é definida da seguinte forma:

$$\frac{1}{\sqrt{N_m} \sqrt{N_n}} \int_a^b \psi_m(z) \psi_n(z) dz = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases}$$

na qual  $N_m$  é o quadrado da norma no espaço

$$L^2(0,h) \text{ expressa por } N_m = \int_0^h \psi_m^2(z) dz.$$

Esta base de autofunções será usada para expandir a variável  $c(z,t)$  da seguinte forma:

$$c(z,t) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(z) \bar{c}_n(t)}{\sqrt{N_n}}. \tag{4}$$

Uma natural aproximação de  $c(z,t)$  é então uma série truncada da forma:

$$c(z,t) = \frac{\sum_{n=1}^{N_{\max}} \psi_n(z) \bar{c}_n(t)}{\sqrt{N_n}}, \tag{5}$$

onde  $N_{\max}$  é a ordem de truncamento da série. Note que em (5)  $c(z,t)$  é a projeção de  $\bar{c}_n(t)$  na base ortogonal  $\psi_n(z)$  m  $L^2(0,h)$ . Para determinar o coeficiente desconhecido  $\bar{c}_n(t)$  substitui-se a Eq. (5) em Eq. (2), aplica-se o operador  $\frac{1}{\sqrt{N_n}} \int \psi_n(z) dz$  que é a transformação integral propriamente dita. Executadas todas as integrações, o resultado é um sistema de equações diferenciais ordinárias, cuja variável dependente é  $\bar{c}_n(t)$  (problema transformado) dada na forma matricial por:

$$\mathbf{Y}'(t) + \mathbf{F} \mathbf{Y}(t) = \mathbf{0}, \tag{6}$$

para  $t > 0$  sujeito a condição inicial  $\mathbf{Y}(0) = c_n(z,0)$ , onde  $\mathbf{Y}(t)$  é um vetor cujas componentes são  $\bar{c}_n(t)$  e  $\mathbf{F} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{E}$ ;  $\mathbf{B} = \{b_{n,m}\}$  e  $\mathbf{E} = \{e_{n,m}\}$  são matrizes cujas entradas são respectivamente:

$$b_{n,m} = \int_0^h \frac{\Psi_n(z) \Psi_m(z) dz}{\sqrt{N_n} \sqrt{N_m}} \quad \text{e}$$

$$e_{n,m} = \int_0^h \frac{K'_z \Psi'_n(z) \Psi_m(z) dz}{\sqrt{N_n} \sqrt{N_m}} - \lambda_n^2 \int_0^h \frac{K_z \Psi_n(z) \Psi'_m(z) dz}{\sqrt{N_n} \sqrt{N_m}}$$

Cabe ressaltar que os mesmos procedimentos acima são realizadas para a condição inicial de

fonte Eq. (1.b). Nota-se que a Eq. (6) é uma equação matricial linear homogênea de primeira ordem com entradas constantes. Assumindo que  $\mathbf{F}$  é não-defectiva, ou seja,  $\mathbf{F}$  pode ser diagonalizada, pode-se obter facilmente a solução:

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{X} \mathbf{G}(t) \mathbf{X}^{-1} \mathbf{Y}(0) \tag{7}$$

onde  $\mathbf{X}$  é a matriz dos autovetores,  $\mathbf{X}^{-1}$  é a matriz inversa do autovetores,  $\mathbf{Y}(0)$  é o vetor condições iniciais e  $\mathbf{G}(t)$  é a matriz exponencial diagonal dos autovalores dada por  $e^{-d_n t}$ .

Conhecendo-se a solução do problema transformado (6) e auxiliar (3), respectivamente, o somatório da Eq. (5) pode ser truncado em um número de termos para a determinação do potencial original  $c(z,t)$ . Uma pergunta que surge é: **como garantir a convergência da série dada por (5)?** Na sequencia apresenta-se o teste de Abel para a convergência uniforme da série.

### 2.1 Teste de Abel para convergência uniforme

Agora se estabelece um teste para a convergência uniforme de séries infinitas cujos termos são produtos de funções de certas classes.

A seguinte forma generalizada e adaptada do teste de Abel mostra que quando os termos de uma série uniformemente convergente  $X_i(z)$  são multiplicados por funções  $T_i(t)$  monótonas e limitadas, a nova série é uniformemente convergente. Fica clara a analogia com a GILTT, uma vez que as séries uniformemente convergentes  $X_i(z)$  fazem o papel da solução do problema auxiliar e as funções  $T_i(t)$  fazem o papel da solução do problema transformado.

**Teorema 1.** A série  $\sum_{i=1}^{\infty} X_i(z) T_i(t)$  converge uniformemente com respeito as duas variáveis  $z$  e  $t$  numa região  $R$  do plano  $zt$  se:

Cabe ressaltar que os mesmos procedimentos acima são realizadas para a condição inicial de

a) A série  $\sum_{i=1}^{\infty} X_i(z)$  converge uniformemente com respeito a  $z$  para todo  $z$  tal que  $(z,t)$  está em  $R$  e  
 b) Para todo  $t$  tal que  $(z,t)$  está em  $R$ , as funções  $T_i(t)$  são uniformemente limitadas e monótonas com respeito a  $i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ).

**Demonstração:**

Seja  $S_n$  as somas parciais

$$S_n(z,t) = \sum_{i=1}^n X_i(z)T_i(t). \tag{8}$$

A convergência uniforme é estabelecida se para cada  $\varepsilon > 0$  existir um correspondente inteiro  $n_\varepsilon$ , independente de  $z$  e  $t$ , tal que  $|S_m(z,t) - S_n(z,t)| < \varepsilon$  sempre que  $n > n_\varepsilon$  para todos os inteiros  $m = n + 1, n + 2, \dots$  e para todos os pontos  $(z,t)$  em  $R$ . Escrevendo  $S_n$  para as somas parciais  $s_n = X_1(z) + X_2(z) + \dots + X_n(z)$ . Então para cada par de inteiros  $m, n$  com  $(m > n)$ ,  $S_m - S_n$  pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} & X_{n+1}T_{n+1} + X_{n+2}T_{n+2} + \dots + X_mT_m = \\ & (s_{n+1} - s_n)T_{n+1} + (s_{n+2} - s_{n+1})T_{n+2} + \dots \\ & (s_m - s_{m-1})T_m = (s_{n+1} - s_n)T_{n+1} + \\ & (s_{n+2} - s_{n+1})T_{n+2} - (s_{n+1} - s_n)T_{n+2} + \dots \\ & (s_m - s_n)T_m - (s_{m-1} - s_n)T_m \end{aligned} \tag{9}$$

Juntando os pares alternados fica-se com:

$$\begin{aligned} S_m - S_n &= (s_{n+1} - s_n)(T_{n+1} - T_{n+2}) + \\ & (s_{n+2} - s_{n+1})(T_{n+2} - T_{n+3}) + \dots \\ & (s_{m-1} - s_n)(T_{m-1} - T_m) + (s_m - s_n)T_m \end{aligned} \tag{10}$$

Supondo agora que as funções  $T_i(t)$  são não crescentes com respeito a  $i$  e limitadas. Então os termos  $T_{n+1} - T_{n+2}, T_{n+2} - T_{n+3}$  em (10) são não-negativos e  $|T_i(t)| < k$ . Portanto, a série com respeito a  $X_i(z)$  converge uniformemente. Ou seja, um inteiro  $n_\varepsilon$  existe tal que

$|s_{n+j}(z) - s_n(z)| < \frac{\varepsilon}{3k}$  para  $n > n_\varepsilon$  e para todo inteiro positivo  $j$ , onde  $\varepsilon$  é algum número positivo e  $n_\varepsilon$  é independente de  $z$ . Então, se  $n > n_\varepsilon$  e  $m > n$ , segue da Eq. (10) que

$$\begin{aligned} |S_m - S_n| &< \frac{\varepsilon}{3k} [(T_{n+1} - T_{n+2}) + \\ & + (T_{n+2} - T_{n+3}) + \dots + |T_m|] = \\ & \frac{\varepsilon}{3k} (T_{n+1} - T_m + |T_m|) \leq \\ & \frac{\varepsilon}{3k} (|T_{n+1}| + 2|T_m|) \end{aligned} \tag{11}$$

Portanto,  $|S_m(z,t) - S_n(z,t)| < \varepsilon$  para  $m > n > n_\varepsilon$  e a convergência da série  $\sum_{i=1}^{\infty} X_i(z)T_i(t)$  está estabelecida. A prova é similar no caso de funções  $T_i(t)$  não decrescentes com respeito a  $i$ .

O teorema mostra que, quando  $T_i(t)$  são limitadas e monótonas e  $X_i(z)$  são uniformemente convergentes, a série dos termos  $X_i(z)T_i(t)$  é uniformemente convergente com respeito a  $z$  e  $t$ .

É fácil ver que o problema transformado forma uma sequência monótona e limitada, uma vez que os autovalores do problema transformado (6) são positivos e o caráter da solução (7) é uma exponencial decrescente.

Com relação ao problema auxiliar tem-se que mostrar que é uniformemente convergente. Para isso utiliza-se o princípio de Weierstrass de acumulação. Para isso, restringe-se o problema a um conjunto de funções admissíveis equicontínuas, ou seja, a funções  $f(z)$  na qual

$$\int_0^h \left( \frac{df(z)}{dz} \right)^2 dz \leq M \tag{12}$$

onde  $M$  é uma constante fixa no intervalo  $0 < z < h$ .

Para um conjunto de funções equicontínuas o princípio de acumulação é válido:

**Teorema de Arzela:** *De algum conjunto de funções equicontínuas e uniformemente limitadas num domínio arbitrário  $G$ , é possível selecionar uma sequência de funções que converge uniformemente para uma função limitada contínua no domínio  $G$ .*

Para o problema auxiliar satisfazer (12) e, conseqüentemente, garantir a convergência uniforme dada pelo Teorema de Arzela, propõe-se que Eq.(5) seja modificada por:

$$c(z,t) = \frac{\sum_{n=1}^{N_{\max}} \frac{\psi_n(z)}{\lambda_n^2} c_n(t)}{\sqrt{N_n}} \quad (13)$$

ou seja, que o problema auxiliar seja dividido pelos autovalores elevado ao quadrado.

### 3 Resultados

De modo a poder utilizar a solução obtida (Eq. 13), é necessário selecionar o perfil de vento e o coeficiente de difusão vertical. Em problemas de difusão atmosférica, a escolha de uma parametrização turbulenta representa uma decisão fundamental para modelar a dispersão de poluentes. A partir de um ponto de vista físico, uma parametrização da turbulência é uma aproximação da natureza no sentido que os modelos matemáticos recebem uma relação aproximada que substitui um termo desconhecido. A confiabilidade de cada modelo depende fortemente da maneira como os parâmetros são calculados e relacionados ao entendimento da camada limite atmosférica (Mangia et al., 2002).

Em termos de parâmetros de escala convectivos, o coeficiente de difusão vertical pode ser formulado como (Degrazia et al., 1997):

$$\frac{K_z}{w_* h} = 0.22 \left(\frac{z}{h}\right)^{1/3} \left(1 - \frac{z}{h}\right)^{1/3} * \left[1 - \exp\left(-\frac{4z}{h}\right) - 0.0003 \exp\left(\frac{8z}{h}\right)\right] \quad (14)$$

onde  $z$  é a altura;  $h$  o comprimento da camada limite atmosférica e  $w_*$  é a escala de velocidade convectiva.

Para o perfil de vento se adotou neste trabalho o perfil potencia, de acordo com Panofsky and Dutton (1984),

$$\frac{\bar{u}_z}{\bar{u}_{z_1}} = \left(\frac{z}{z_1}\right)^\alpha \quad (15)$$

onde  $\bar{u}_z$  e  $\bar{u}_{z_1}$  são as velocidades medias horizontais do vento nas alturas  $z$  e  $z_1$ , respectivamente, e  $\alpha$  é um expoente relacionado com a intensidade da turbulência (Irwin, 1979).

Nas simulações foi utilizado o perfil do coeficiente de difusão descrito pela Eq. (14) e perfil de vento (15). Os dados micrometeorológicos foram:  $h = 810\text{m}$ ,  $w_* = 2,2\text{m/s}$ , rugosidade do terreno  $z_0 = 60\text{cm}$ , comprimento de Obukhov  $L = -56\text{m}$ , altura de fonte  $H_s = 115\text{m}$ , e medida do poluente em  $z=1\text{m}$ , caracterizando um regime atmosférico instável.

A fim de melhor observar o caráter de função monótona e limitada do problema transformado, na Tab. 1, apresentam-se os autovalores da matriz do problema transformado (6) para  $N_{\max} = 10$ . Na Tab. 2, apresenta-se a solução do problema transformado para a primeira posição do vetor solução para alguns tempos.

Observando a Tab. 1, fica claro que, como os autovalores do problema transformado são positivos e a solução (12) contém uma matriz exponencial diagonal negativa dos autovalores dependente do tempo ( $e^{-d_n t}$ ), a solução do problema transformado é dada por um vetor decrescente (monótono) e limitado, a medida que o tempo aumenta. Isso pode ser constatado na Tab. 2.

Analisando a Fig. 1, pode-se perceber um aumento do pico máximo de concentração de poluente para tempos pequenos. Com a passagem do tempo a solução modificada (Eq. (12)) tem o mesmo comportamento da solução tradicional (Eq. (5)).

**Tabela 1:** Autovalores da matriz F do problema transformado dado pela Eq. (6).

Autovalor	Autovalores da matriz F utilizando Eq. (5)	Autovalores da matriz F utilizando Eq. (13)
$\lambda_1$	2,429047553E-001	2,429047124E-001
$\lambda_2$	1,939268785E-001	1,939268370E-001
$\lambda_3$	1,320220418E-001	1,320219941E-001
$\lambda_4$	9,932098506E-002	9,932093926E-002
$\lambda_5$	6,661539263E-002	6,661534258E-002
$\lambda_6$	4,569521172E-002	4,569516545E-002
$\lambda_7$	2,807151891E-002	2,807147444E-002
$\lambda_8$	1,623733257E-002	1,623729855E-002
$\lambda_9$	7,838160851E-003	7,838140906E-003
$\lambda_{10}$	2,567223169E-003	2,567218235E-003

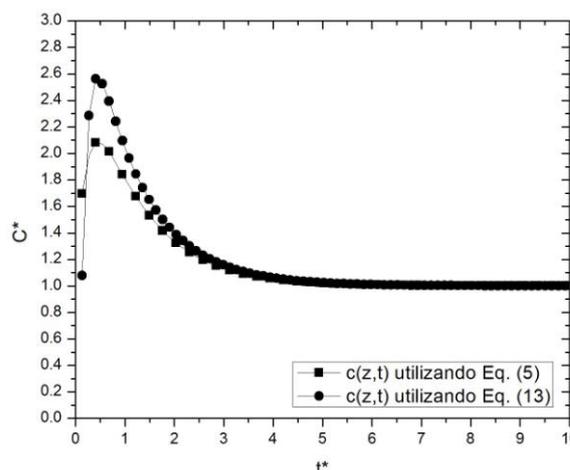
**Tabela 2:** Solução final do problema transformado, dado pela Eq. (7), para a primeira posição do vetor para alguns tempos.

Tempo	Eq. (7) utilizando (5)	Eq. (7) utilizando (13)
t=200s	1,2369982E-002	1,2354830732E-002
t=300 s	1,2365428E-002	1,2354830734E-002
t=400 s	1,2362891E-002	1,2354830735E-002
t=500 s	1,2360974E-002	1,2354830737E-002
t=600 s	1,2359527E-002	1,2354830738E-002

### 4 Conclusão

Começa-se a análise final lembrando que o teorema de Cauchy-Kowalewsky garante a existência e unicidade de uma solução analítica para a equação de advecção-difusão (Courant e Hilbert, 1989). Sabe-se que as soluções analíticas podem ser escritas de duas formas equivalentes: solução expressa ou na forma integral ou com uma formulação em série. Neste trabalho, focou-se a atenção na simulação da dispersão de poluentes na atmosfera, apresentando uma solução analítica com uma formulação em série da equação de advecção-difusão transiente bidimensional pelo método GILTT. Soluções analíticas são de fundamental importância para

entender e descrever fenômenos físicos, pois elas levam em conta explicitamente todos os parâmetros de um problema, de modo que suas influências podem ser confiavelmente investigadas e facilmente obter-se o comportamento assintótico da solução.



**Figura 1:** Concentração adimensional ( $C^* = ch/Q$ ) de poluentes em função do tempo adimensional ( $t^* = tW_* / h$ ).

Para compreender melhor a importância de pesquisar a solução analítica da equação de advecção-difusão, a fim de simular a dispersão de poluentes na CLP, deve-se procurar as possíveis fontes de erro tanto no modelo quanto na simulação numérica da concentração do poluente. É necessário recordar que a equação de advecção-difusão é uma descrição matemática dos fenômenos físicos da dispersão de contaminantes na CLP para a turbulência, velocidade do vento e coeficientes de difusão turbulenta vertical. Além destas incertezas e também da compreensão incompleta dos fenômenos da turbulência, tem-se que fazer um exame do erro inerente ao método matemático adotado para resolver a equação de advecção-difusão. Aparece aqui a relevância da solução analítica. Certamente, tendo em vista o tipo de solução apresentada, pode-se dizer que o erro no cálculo da concentração do poluente por este tipo de solução, exceto o erro de truncamento, é mitigado pelo caráter analítico da solução. Consequentemente, o erro neste trabalho fica restrito as incertezas impostas ao modelo.

Neste trabalho, apresenta-se uma análise de convergência da técnica GILTT para problemas de dispersão de poluentes. Com o teste de Abel foi possível estabelecer uma garantia de convergência do método modificando a base de expansão do problema auxiliada pela simples divisão dos seus respectivos autovalores ao quadrado. Essa modificação foi realizada para garantir funções equicontínuas e uniformemente limitadas num domínio arbitrário através do teorema de Arzela. Cabe ressaltar que, uma vez que é possível garantir a existência e unicidade do problema (1) com condições de contorno (1.a) e condições iniciais (1.b) pelo princípio do máximo e teorema de Cauchy-Kowalewski, a garantia de convergência consolida a solução do problema em representação analítica pela técnica da GILTT para a solução do problema. O foco futuro deste trabalho baseia-se na extensão do teorema apresentado para funções de várias variáveis.

## Agradecimentos

Os autores agradecem ao apoio financeiro recebido pelo CNPq e FAPERGS.

## Referências

- Buske, D., Vilhena, M.T., Tirabassi, T., Bodmann, B. (2012). Air Pollution Steady-State Advection-Diffusion Equation: The General Three-Dimensional Solution. *J. Env. Protection*, 3, 1124-1134.
- Carvalho, J. C., Moreira, D. M. (2007). Evaluation of two semi-analytical techniques in air quality applications. *Rev. Brasileira de Meteorologia*, 22, 10–20.
- Costa, C.P., Vilhena, M.T., Moreira, D.M., Tirabassi, T. (2006). Semi-analytical solution of the steady three-dimensional advection-diffusion equation in the planetary boundary layer. *Atmos. Environ.*, 40 (29), 5659-5669.
- Cotta, R., Mikheylov, M. (1997). Heat conduction lumped analysis, integral transforms, symbolic computation, John Wiley Sons, Baffins Lane, Chinchester, England.
- Courant, R., Hilbert, D. (1989). *Methods of Mathematical Physics*, John Wiley & Sons.
- Degrazia, G.A., Campos Velho, H.F., Carvalho, J.C. (1997). Nonlocal exchange coefficients for the convective boundary layer derived from spectral properties. *Contr. Atmos. Phys.*, 57-64.
- Hanna, S.R., Briggs, G.A., Hosker Jr., R.P. (1982). *Handbook on Atmospheric Diffusion*. Oak Ridge, Tennessee: U. S: Department of Energy, Technical Information Center, 102p.
- Irwin, J.C. (1979). A theoretical variation of the wind profile power-law exponent as a function of surface roughness and stability. *Atm. Environ.*, 13, 191-194.
- Mangia, C., Moreira, D.M., Schipa, I., Degrazia, G.A., Tirabassi, T. (2002). Evaluation of a new eddy diffusivity parameterization from turbulent Eulerian spectra in different stability conditions. *Atm. Environ*, 36, 67-76.
- Moreira, D.M., Tirabassi, T. (2004). Modelo matemático de Dispersão de poluentes na atmosfera: um instrumento técnico para gestão ambiental. *Ambiente & Sociedade*, 7 (2), 169-171.
- Moreira, D.M., Vilhena, M.T., Tirabassi, T., Costa, C., Bodmann, B. (2006). Simulation of pollutant dispersion in atmosphere by the Laplace transform: the ADMM approach. *Water, Air and Soil Pollution*, 177, 411-439.
- Moreira, D.M., Vilhena, M.T., Buske, D., Tirabassi, T. (2009). The State-of-art of the GILTT Method to Simulate Pollutant Dispersion in the Atmosphere. *Atm. Research.*, 92, 1-17.
- Panofsky, A.H., Dutton, J.A. (1984). *Atmospheric Turbulence*. John Wiley & Sons, New York.
- Wortmann, S., Vilhena, M.T., Moreira, D.M., Buske, D. (2005). A new analytical approach to simulate the pollutant dispersion in the PBL. *Atmos. Environ.*, 39, 2171-2178.