

Uma solução genuína da equação de advecção difusão com forma sesquilinear para problema multi-fonte.

A genuine solution of the diffusion advection equation sesquilinear way to multi-source problem.

Debora Lidia Gisch, Bardo Bodmann, Marco Túllio Menna Barreto de Vilhena

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, UFRGS, Porto Alegre, RS, Brasil
debora.gisch@gmail.com, bejbodmann@gmail.com, mtmbvilhena@gmail.com

Resumo

O presente trabalho é uma proposta para uma aproximação alternativa para o modelo de dispersão de poluentes, e incluir algumas características que podem ser associadas ao fenômeno de turbulência. Como ponto de partida nós consideramos dois axiomas que conduzem a um modelo e sua solução é compatível com as descrições de distribuições. No primeiro garantimos solução semi-positiva, como se espera de uma distribuição, considerando que o segundo axioma implementa estruturas compatíveis com estruturas coerentes através da implementação de formas sesquilinear.

Palavras-chave: Dispersão de Poluentes, Estruturas Coerentes, Formas Sesquilinear.

Abstract

The present work is a proposal for an alternative approach for pollution dispersion modelling, including some characteristics that may be associated to the phenomenon of turbulence. As a starting point we consider two axiomatic properties that shall lead to a model and its solution compatible with distributional descriptions. The first one states that a solution shall be semi-positive as expected for a distribution, whereas the second axiom demands for compatibility with coherent structures, which are implemented by the use of sesquilinear forms.

Keywords: Pollution Dispersion, Coherent Structures, Sesquilinear Forms.

1 Introdução

A dispersão de poluentes é um fenômeno complexo dado que ao observar uma chaminé pode-se identificar diversas estruturas como vórtices e turbilhões, flutuações na densidade do poluente e na velocidade da dispersão Hussain e Fazle (1986). Um reflexo dessa complexidade é que, para reproduzi-la, há modelos que utilizam um grande número de parâmetros. Neste trabalho constrói-se um modelo de dispersão de poluentes que apresenta estas estruturas apenas introduzindo um coeficiente de difusão complexo, modificando, assim, o fechamento Fickiano Stull (1988).

2 Metodologia

O modelo analítico de dispersão de poluentes amplamente estudado é o da equação advecção-difusão Arya (1999) onde simplificações como as médias de Reynolds e o fechamento Fickiano são aplicados para que a solução seja facilmente obtida.

A equação é dada por,

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = K_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + K_z \frac{\partial^2 C}{\partial z^2},$$

onde C [g/m^3] concentração, u [m/s] velocidade na direção x [m] e os K 's [m^2/s] coeficientes de difusão das respectivas coordenadas espaciais. Sendo as condições, fluxo nulo no contorno, fontes contínuas com concentração nula no tempo inicial e constituída por três fontes pontuais alinhadas na coordenada y com distância de 0.1 [m] entre elas. Descritas como:

$$\begin{aligned} uC(0,y,z,t) &= \dot{Q}\delta(y - y_0)\delta(z - H_s), \\ uC(0,y,z,t) &= \dot{Q}\delta(y - y_0 + 0.1)\delta(z - H_s), \\ uC(0,y,z,t) &= \dot{Q}\delta(y - y_0 - 0.1)\delta(z - H_s), \end{aligned}$$

onde H_s é altura da fonte.

Para resgatar algumas características do fenômeno turbulento propomos a inclusão de uma fase na equação advecção-difusão tridimensional e transiente, já que (ECs) são características turbulentas dominadas pela fase. Assim resolve-se a equação advecção-difusão e ao obter-se a solução inclui-se uma modificação no fechamento Fickiano, através da substituição do coeficiente de difusão K_z por um coeficiente de difusão complexo e formando a grandeza que representa a distribuição de poluentes de forma sesquilinear Bodmann et al. (2013). O complexo de uma constante é representado por $K_z = K_{za} + iK_{zb}$, onde K_{za} é a parte real e K_{zb} imaginária. Esse coeficiente complexo torna a solução da equação advecção-difusão complexa, ou seja a solução está no corpo dos complexos com módulo e fase. A distribuição da concentração deve ser real e

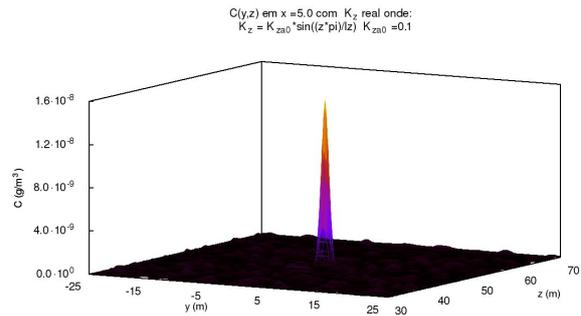


Figura 1: Distribuição $C(y,z)$ com K_z real.

semi-positiva, portanto usa-se uma analogia aos fenômenos eletromagnéticos Jackson (1999), onde a densidade de energia é descrita de forma sesquilinear em termos do campo elétrico. Consequentemente a solução gera uma distribuição semi-positiva definida e não linear desenvolvendo assim uma característica qualitativa presente nos procedimentos de covariância de turbilhões. Então multiplicando a solução complexa $\mathcal{C}(x,y,z,t)$ pela sua solução complexa conjugada $\mathcal{C}^*(x,y,z,t)$

$$\mathcal{C}(x,y,z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} A_{nl} \mathcal{C}(x,t) \cos\left(\frac{n\pi}{L_y} y\right) \cos\left(\frac{l\pi}{L_z} z\right),$$

$$\mathcal{C}(x,t) = \int_0^t \frac{1}{2} e^{\frac{u}{2K_x} x} e^{\left(\alpha - \frac{u^2}{4K_x}\right)\tau} e^{-\left(\frac{x^2}{4K_x\tau}\right)} \left[\frac{x}{\sqrt{\pi K_x \tau^3}} - \frac{5\sqrt{K_x} u}{\sqrt{\pi \tau}} \right] d\tau,$$

$$\alpha = - \left[(K_{za} + iK_{zb}) \left(\frac{l\pi}{L_z}\right)^2 + K_y \left(\frac{n\pi}{L_y}\right)^2 \right],$$

onde a diferença é que $K_z^* = K_{za} - iK_{zb}$.

3 Resultados e Discussões

Foram determinadas uma série de distribuições espaciais e temporais-espaciais e comparadas com distribuições com o coeficiente de difusão real obtidas nas mesmas condições como em 1 e 2 . Mostramos a capacidade do modelo de reproduzir esses resultados sem nenhum comportamento turbulento apenas usando um coeficiente complexo com parte imaginária zero que nada mais é que a representação do conjunto dos reais no conjunto dos complexos.

Devido ao fato de por enquanto não existir uma prescrição de como determinar os parâmetros do modelo de forma à representar o fenômeno físico então

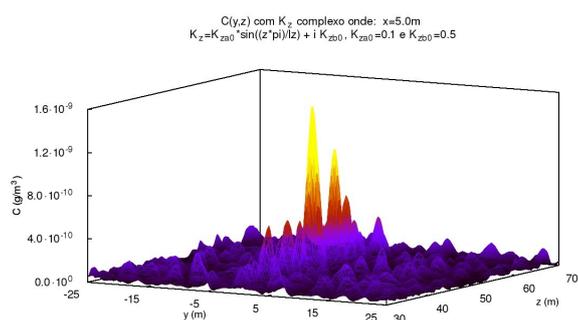


Figura 2: Distribuição $C(y,z)$ com K_z complexo.

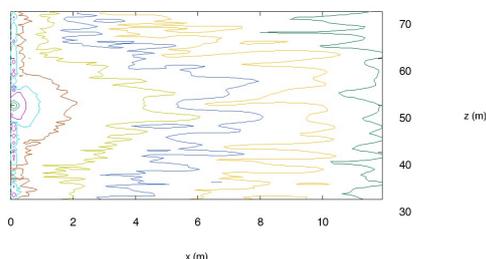
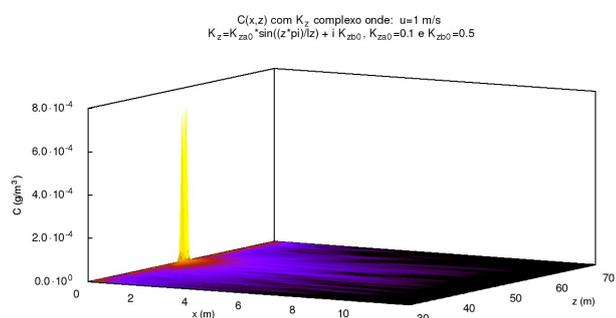


Figura 3: Distribuição e Mapa das concentrações $C(x,z)$ com vento fraco.

geram-se soluções para uma variedade de partes imaginárias dos coeficientes de difusão. Assim avalia-se o comportamento da solução ao variar a parte imaginária do coeficiente de difusão onde observa-se um alargamento da distribuição juntamente com oscilações o que concorda com o aumento do coeficiente, que no caso real quanto maior coeficiente de difusão maior é a dispersão.

O fenômeno de meandro observado na distribuição e no mapa 3, que em condições de vento fraco e próximo a fonte a dispersão de poluentes é irregular e indefinida onde a pluma está sujeita a ondulações horizontais à direção do vento também foi detectada como em Gisch et al. (2015). Este fenômeno não é observado na distribuição nem no mapa 4 em condições de vento forte.

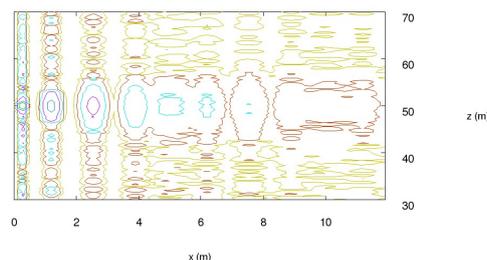
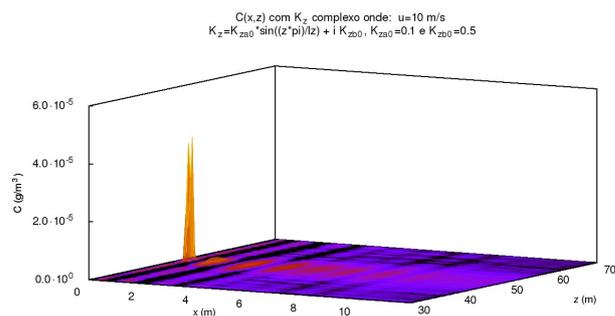


Figura 4: Distribuição e Mapa das concentrações $C(x,z)$ com vento forte.

4 Conclusões

O modelo de dispersão de poluentes com coeficiente de difusão real e complexo foi comparado para a mesma situação podendo observar qualitativamente a inclusão da fase no modelo. O modelo de dispersão de poluentes presente abre a possibilidade de descrever propriedades filigranas do fenômeno ao custo de poucos parâmetros. Descrições comparáveis com um modelo puramente real precisaria de um conjunto exorbitante de parâmetros para obter o mesmo efeito. Todos os resultados ainda são preliminares para garantir que esta será uma modificação justificada a partir de primeiros princípios, mas pretende-se estudar e incluir uma dependência temporal e espacial mais adequada no coeficiente de difusão e até mesmo substituir o coeficiente de difusão real por um complexo nas demais direções e subsequentemente validar os resultados com resultados experimentais.

Agradecimentos

Agradeço a CNPq a CAPES e a Linhares Geração S.A.

Referências

- Arya, S. P. (1999). *Air Pollution Meteorology and Dispersion*. Oxford University Press, New York, USA.
- Bodmann, B. E. J., Zabadal, J. R. S., Vilhena, M. T., Quadros, R. (2013). On coherent structures from a

diffusion-like model. Em: *Integral Methods in Science and Engineering*, Springer New York Heidelberg Dordrecht London, pp. 1–10.

Gisch, D. L., Bodmann, B. E. J., Vilhena, M. T. (2015). Two reasons why pollution dispersion modelling needs sesquilinear forms. Em: *Integral Methods in Science and Engineering*, Springer International Publishing Switzerland, p Unpublished.

Hussain, A. K., Fazle, M. (1986). Coherent structures and turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 173, 303, URL http://www.journals.cambridge.org/abstract_S0022112086001192.

Jackson, J. D. (1999). *Classical electrodynamics*, 3^o edn. Wiley, New York, NY, URL <http://cdsweb.cern.ch/record/490457>.

Stull, R. B. (1988). *An Introduction to Boundary Layer Meteorology*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Holanda.