

## Área do Triângulo Cujos Vértices São As Projeções $\beta$ De Um Ponto $O$ Sobre os Lados de Um Triângulo

Triangle area whose vertex are the projections  $\beta$  of a point  $O$  on the sides of a triangle

Aline Pires Carneiro Santos<sup>1</sup> e Andre Krindges<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>Departamento de Matemática - Universidade Federal de Mato Grosso, MT, Brasil  
cajm422@gmail.com; krindges@gmail.com

### Resumo

O presente artigo visa estabelecer uma relação entre a área do triângulo que tem como vértice as projeções sobre o lado do triângulo e área de tal triângulo. Tomamos como base o triângulo pedal definido por Coxeter (1967), o trabalho de Ivam (2007) e as atividades desenvolvidas na página de jwilson [3] além do software GeoGebra que nos permite realizar alterações em elementos da construção geométrica observando o comportamento dos demais elementos, favorecendo a investigação e exploração de inúmeras conjecturas.

**Palavras-chave:** Geometria, geogebra, triângulos.

### Abstract

This article aims to establish a relationship between the area of the triangle whose vertex projections on the side of the triangle and the area of such a triangle. We take as a basis the pedal triangle defined by Coxeter (1967), the work of Ivam (2007) and the activities in the jwilson [3] page beyond GeoGebra software that allows us to perform alterations in the geometric construction observing the behavior of others elements, promoting research and exploration of numerous conjectures.

**Keywords:** Geometry, geogebra, triangles.

### 1 Introdução

Observando reta de Simson<sup>1</sup> percebemos a preservação de uma propriedade para pontos sobre a circunferência circunscrita, conjecturamos o que poderia acontecer com o conjunto de pontos equidistantes do circuncentro.

A partir da construção no GeoGebra de um triângulo pedal<sup>2</sup> DEF do triângulo ABC associado a um ponto P, verificamos que a área de DEF se matem para todo P equidistante do circuncentro de ABC.

Verificamos que tais conjecturas são validas também para triângulos formados por projeções, não necessariamente ortogonais (triângulo pedal), de um ponto sobre os lados de um triângulo (ou seus prolongamentos).

Apresentaremos os resultados do teorema de Euler para o triângulo pedal, abrindo mão da ortogonalidade.

### 2 O Teorema

Ivan Borsenco [2] enuncia e demonstra o teorema de Euler para o triângulo pedal que expressa a área do triângulo cujo vértice são projeções ortogonais de um ponto arbitrário no plano nos lados do triângulo dado.

**Teorema 1.** Seja ABC um triângulo e  $\lambda = C(O; R)$  a circunferência circunscrita. Seja P um ponto no plano do triângulo. Seja D, E e F os pontos pedais de P.

Então:

$$(2.1) \quad \frac{\text{Área}(DEF)}{\text{Área}(ABC)} = \frac{|R^2 - OP^2|}{4R^2}$$

Quando abrimos mão da ortogonalidade, temos:

**Teorema 2.** Seja  $\lambda = C(O; R)$  a circunferência circunscrita ao triângulo ABC. Considere um ponto P no plano do triângulo e um ângulo

<sup>1</sup> Os pés das perpendiculares traçadas de um ponto aos lados de um triângulo ou de seus prolongamentos são colineares se e somente se o ponto está sobre a circunferência circunscrita

<sup>2</sup> Seja P um ponto qualquer no plano do triângulo ABC e sejam D, E e F as projeções de P sobre as retas AB; BC e CA. O triângulo DEF será chamado de triângulo Pedal.

$0^\circ < \beta < 180^\circ$ , sejam D, E e F pontos sobre as retas AB, BC, CA tais que PD, PE, PF formam um ângulo com as retas AB, BC, AC, respectivamente, na mesma orientação. Então:

$$(2.2) \quad \frac{\text{Área}(DEF)}{\text{Área}(ABC)} = \frac{|R^2 - OP^2|}{4R^2 \sin^2 \beta}$$

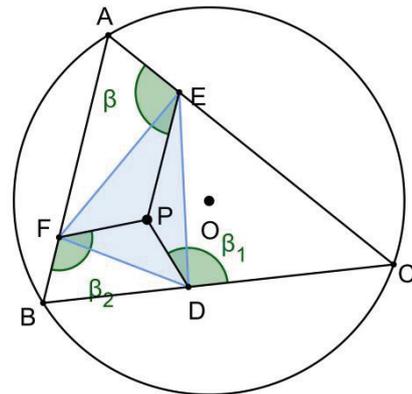


Figura 1. Triângulo DEF gerado pelas projeções de P em ABC

**Demonstração:** Seja G, H e I os pontos de interseção das retas AP, BP e CP com a circunferência  $\lambda$  como mostra a Figura 2.

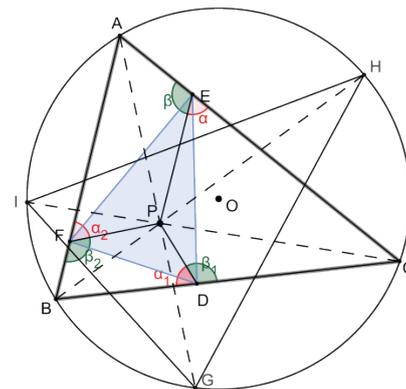


Figura 2. Triângulo GHI semelhante a DEF

Os triângulos IPH e BPC são semelhantes, pois os ângulos  $\angle HIP$  e  $\angle PBC$  são iguais por pertencerem ao mesmo arco capaz  $\widehat{HC}$  e  $\angle IHP$  e  $\angle PCB$  também são iguais por pertencerem ao mesmo arco capaz  $\widehat{IB}$ . Então:

$$(3) \quad \frac{IH}{BC} = \frac{HP}{CP} = \frac{IP}{BP}$$

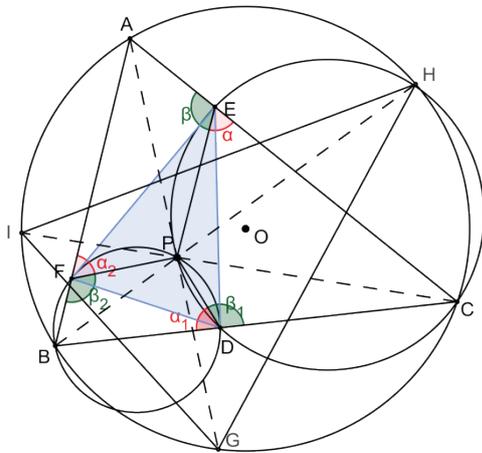


Figura 3. Circunscricao de  $FBPD$  e  $PDCE$

Observando a Figura 3 e fácil ver que os quadriláteros  $FBPD$  e  $PDCE$  são inscritíveis, pois os ângulos  $\alpha$  e  $\beta_1$  são suplementares, pois pertencem ao lado  $BC$ , então:

- $\alpha_1$  e  $\beta_2$  são suplementares e opostos em relação ao quadrilátero  $FBPD$ , o que o torna inscritível em uma circunferência de diâmetro  $2r$ .
- $\beta_1$  e  $\alpha$  são opostos em relação ao quadrilátero  $ECDP$ , o que o torna inscritível em uma circunferência de diâmetro  $2r_1$ . Usando a propriedade de arco capaz na circunferência que os circunscribe temos:
  - $\angle FDP = \angle FBP$ , pois pertencem ao mesmo arco capaz  $\widehat{FP}$
  - $\angle FBP = \angle AGH$ , pois pertencem ao mesmo arco capaz  $\widehat{AH}$

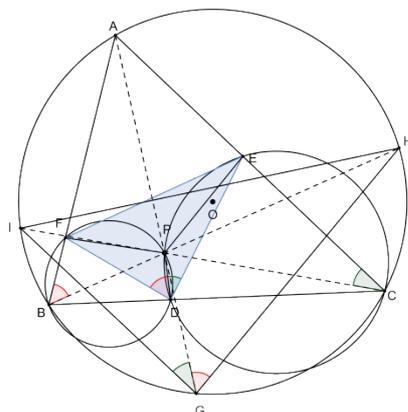


Figura 4: triângulos  $DEF$  e  $HIG$  semelhantes

Logo,  $\angle FDP = \angle AGH$

- $\angle PDE = \angle PCE$ , pois pertencem ao mesmo arco capaz  $\widehat{PE}$
- $\angle PCE = \angle IGA$ , pois pertencem ao mesmo arco capaz  $\widehat{IA}$

Logo,  $\angle PDE = \angle IGA$

Sabendo que:

$$\begin{aligned} \angle FDE &= \angle FDP + \angle PDE \text{ e} \\ \angle IGH &= \angle IGA + \angle AGH \end{aligned}$$

temos:

$$\angle FDE = \angle IGH$$

Analogamente  $\angle HIG = \angle EFD$  e

$$\angle IHG = \angle FED,$$

portanto os triângulos  $DEF$  e  $HIG$  são semelhantes e o razão de semelhança entres os raios  $R$  e  $R_{DEF}$  que circunscribe  $HIG$  e  $DEF$  respectivamente obedece a mesma razão de semelhança.

$$\frac{EF}{HI} = \frac{R_{DEF}}{R} \tag{4}$$

Sendo  $FBPD$  inscritível em uma circunferência de diâmetro  $2r$  e aplicando a lei dos Senos nos triângulos  $FBP$ ,  $FDP$  e  $ABC$  temos:

$$\frac{BP}{\text{sen}\beta} = 2r \tag{5}$$

$$\frac{DF}{\text{sen}B} = 2r \tag{6}$$

$$\frac{AC}{\text{sen}B} = 2R \Rightarrow \text{sen}B = \frac{AC}{2R} \tag{7}$$

por 5 e 6 temos:

$$\frac{BP}{\text{sen}\beta} = \frac{DF}{\text{sen}B} \Rightarrow DF = \frac{BP \text{sen}B}{\text{sen}\beta} \tag{8}$$

substituindo 7 em 8, temos:

$$DF = \frac{AC \cdot BP}{2R \cdot \text{sen}\beta} \tag{9}$$

Se usarmos o mesmo raciocínio para encontrar  $DE$  e  $EF$ , teremos:

$$DE = \frac{AB \cdot CP}{2R \cdot \text{sen}\beta} \tag{10}$$

$$EF = \frac{BC \cdot AP}{2R \cdot \text{sen}\beta} \tag{11}$$

Fazendo a razão entre as áreas dos triângulos  $DEF$  e  $ABC$ , temos:

$$\frac{\text{Área}(DEF)}{\text{Área}(ABC)} = \frac{\frac{DE \cdot DF \cdot EF}{4R_{DEF}}}{\frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4R}} = \frac{R \cdot DE \cdot DF \cdot EF}{R_{DEF} \cdot AB \cdot BC \cdot AC} \tag{12}$$

Substituindo 4 em 12, temos:

$$\frac{\text{Área}(DEF)}{\text{Área}(ABC)} = \frac{HI \cdot DE \cdot DF \cdot EF}{EF \cdot AB \cdot BC \cdot AC}$$

e usando 3, 10 e 9, temos:

$$\frac{\text{Área}(DEF)}{\text{Área}(ABC)} = \frac{GP \cdot AB \cdot CP \cdot AC \cdot BP}{2R \cdot \text{sen}\beta \cdot 2R \cdot \text{sen}\beta \cdot AB \cdot AC}$$

$$\frac{\text{Área}(DEF)}{\text{Área}(ABC)} = \frac{GP \cdot CP}{4R^2 \cdot \text{sen}^2\beta} \quad (13)$$

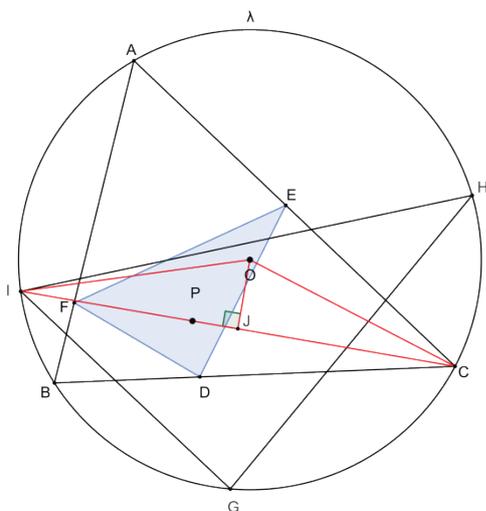


Figura 5: Triângulo isósceles COI

O triângulo COI que se apresenta na Figura 5 detalhado em 6 é isósceles, pois  $OI = OC = R$ . Sendo J em CI tal que OJ seja altura de COI, então  $IJ = JC$ .

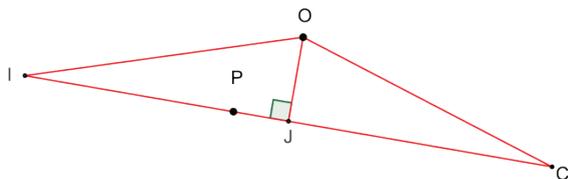


Figura 6: COI extraído da Figura 5

No triângulo OCJ, temos:

$$\begin{aligned} OC^2 &= CJ^2 + OJ^2 \\ OC^2 - CJ^2 &= OJ^2 \end{aligned} \quad (14)$$

No triângulo OPJ, temos

$$\begin{aligned} OP^2 &= OJ^2 + JP^2 \\ OP^2 - JP^2 &= OJ^2 \end{aligned} \quad (15)$$

Igualando 14 e 15 e sabendo que  $OC = R$ , temos

$$\begin{aligned} R^2 - OP^2 &= (CJ - JP)(CJ + JP) \\ R^2 - OP^2 &= IP \cdot CP \end{aligned} \quad (16)$$

Substituindo 16 em 13, temos:

$$\frac{\text{Área}(DEF)}{\text{Área}(ABC)} = \frac{|R^2 - OP^2|}{4R^2 \text{sen}^2\beta}$$

### Referências

- [1] COXETER, H.S.M.; GEITZER, S., Geometry Revisited. D.C. The Mathematical Association, Washington, (1967).
- [2] BORSENCO, Ivan, On the area of a pedal triangle, (2007) Disponível em: [https://www.awesomemath.org/wp-content/uploads/reactions/2007/pedal\(2\).pdf](https://www.awesomemath.org/wp-content/uploads/reactions/2007/pedal(2).pdf), Acesso em: 20 de fev. 2013.
- [3] WILSON, J, Disponível em <http://www.jwilson.coe.uga.edu> Acesso em: 21 de nov. 2012.
- [4] SANTOS, A. P. C. O Triângulo Pedal. 2014. 66f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – ICET, UFMT, Cuiabá. 2014.