

Uma ferramenta para ajudar na fixação dos conceitos básicos de Análise Combinatória

A helping tool for fixing the underlying concepts of Combinatorics

André Gustavo Campos Pereira¹ e José Rauryson Alves Bezerra²

¹Professor associado III da Universidade Federal do Rio Grande do Norte
andre.gustavo.campos.pereira@gmail.com

²Professor efetivo do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte
rauryson@yahoo.com.br

Resumo

Ao longo de sua evolução, os seres humanos criaram processos de contagem para ajudá-los nas suas tarefas do dia-a-dia, e quanto mais a sociedade evolui, maior é a quantidade de coisas que precisam ser contadas. Processos de contagem foram desenvolvidos para ajudar a contagem (classificação) das novas possibilidades que foram criadas naquela época. Hoje em dia, tais técnicas são estudadas no Ensino Médio, num tópico chamado Análise Combinatória. Apesar de tais técnicas serem necessárias e úteis na prática, é difícil ensiná-las não apenas no Ensino Médio como também na Universidade. Nesse trabalho apontamos algumas mudanças desejadas na postura de quem tenta resolver questões de Análise Combinatória e apresentamos uma ferramenta que pode dinamizar o processo de fixação dos conceitos mais básicos deste assunto.

Palavras-chave: Ensino de Matemática. Análise Combinatória.

Abstract

Along its evolution, Humans had to invent counting processes in order to help them in its daily tasks, and the more the society develops, the more is the quantity of things that needed to be counted. Counting techniques were developed to help counting (classifying) such brand new possibilities that were created in that time. Nowadays such techniques are studied at High School, in a subject called Combinatorics. Although such techniques are necessary and useful in practice, it is difficult to teach them not only at High School but also at University. In this paper, desired posture changes in one who tries to solve Combinatorics problems are pointed out and a tool that can dinamize the process of fixing the underlying concepts of this subject is presented.

Keywords: Teaching of Mathematics. Combinatorics.

1 Introdução

Os seres humanos, assim como alguns animais, nascem dotados da capacidade de perceber quantidades. Logo, o desenvolvimento de técnicas de contagem foi um passo natural na evolução do homem. O aumento cada vez maior da demanda por produtos e ideias proveniente de uma sociedade em desenvolvimento, sendo suportado graças a expansão dos recursos tecnológicos, fizeram com que a otimização e a criação de novos métodos de contagem se tornassem necessárias.

Apesar de necessário e útil, o estudo desses métodos esbarra em dificuldades didáticas. A Análise Combinatória, componente do currículo de Matemática para o Ensino Médio, é motivo de horror tanto para alunos, quanto para professores. Os comentários mais frequentes giram em torno das dificuldades de resolução das questões do referido assunto. Também confunde-se muito o uso de uma ferramenta com outra devido a algum questionamento que se deixou de fazer durante a resolução do exercício. Nesse trabalho apresentamos algumas destas situações que ocorrem frequentemente, apontamos algumas mudanças desejadas na postura de quem tenta resolver questões de Análise Combinatória e apresentamos uma ferramenta que pode dinamizar o processo de fixação dos conceitos mais básicos deste assunto, uma vez que esse fluxograma (ferramenta) obriga o aluno a se fazer uma série de perguntas (respondidas via a teoria) todas as vezes que for resolver um novo problema.

2 Por que erramos ao contar?

Todos são passíveis de erros. Erros de contagem, ou de estimativas que se permitem fazer a partir dessas contagens, maculam até mesmo o currículo de alguns cientistas famosos. Na década de 1980, Marilyn von Savant, escritora e colunista americana, recebeu em sua coluna uma pergunta sobre probabilidade:

Suponha que os participantes de um programa de auditório recebam a opção de escolher uma dentre três portas: atrás de uma delas há um carro; atrás das outras há cabras. Depois que um dos participantes escolhe uma porta, o apresentador, que sabe o que há atrás de cada porta, abre uma das portas não

escolhidas, revelando uma cabra. Ele diz ao participante: 'Você gostaria de mudar sua escolha para a outra porta fechada?'. Para o participante é vantajoso trocar a sua escolha?

Marylin afirmou em sua coluna que era mais vantajoso mudar a escolha. Sua resposta para o problema gerou um “confronto” com mais de 10 mil leitores, que lhe enviaram cartas externando seu descontentamento por ela, que, à época, era considerada uma das pessoas com maior QI da história, ter errado algo tão simples. Muita gente importante, como Paul Erdős, matemático húngaro extremamente proficiente, discordou de sua solução. Erdős, mesmo após ter conhecimento de que Marilyn estava certa, só se convenceu de que é mais vantajoso trocar de porta depois de uma simulação do problema feita em um computador por um colaborador.

Ao se analisar as estatísticas de vestibulares e do Exame Nacional do Ensino Médio, o ENEM, é que percebemos o problema da aprendizagem de Análise Combinatória no ensino brasileiro. A média de acerto das questões de Análise Combinatória nestes concursos é invariavelmente baixa. Estas dificuldades não se restringem ao ensino básico. O Departamento de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte oferece aos alunos da Licenciatura Plena em Matemática uma disciplina intitulada Análise Combinatória e Probabilidade. Uma pesquisa feita tomando como amostra as duas turmas desta disciplina que foram ofertadas em 2012 e que estavam sob a responsabilidade do Prof. Dr. André G.C. Pereira, mostra que os erros mais básicos não afetam apenas aos estudantes do Ensino Médio mas também àqueles que se preparam para lecionar Matemática.

Na pesquisa, buscou-se dados que permitissem mensurar a capacidade dos alunos em reconhecer situações específicas de contagem e usar a ferramenta adequada na sua resolução. Os dados utilizados foram obtidos das resoluções das avaliações que foram elaboradas e aplicadas pelo professor. Na avaliação, uma das questões foi formulada a fim mensurar a capacidade do aluno em diferenciar as versões do algoritmo de Permutação (Arranjo Simples, Combinações Simples e Combinações Completas) e de gerar exemplos ilustrativos de cada uma dessas situações. Apesar de contar

com uma amostra bem pequena, os dados coletados nos dão algumas noções sobre a compreensão dos alunos quanto ao uso dos algoritmos de contagem.

Para a análise foram classificadas as respostas dadas pelos alunos à seguinte questão:

“Suponha que um garoto do ensino médio pedisse para você lhe explicar:

a) Quando usar permutação e quando usar combinação/arranjo?

b) A diferença entre combinação e arranjo.

c) A diferença ente combinação e combinação completa.

Explique com suas palavras e dê um exemplo para ilustrar.”

As respostas foram divididas em categorias em que se levou em conta a proximidade da explicação dada com a definição formal e se os exemplos, de fato, podem ser resolvidos com a técnica apontada por eles:

Tabela 1: Classes de resposta consideradas com suas respectivas quantidade de alunos.

Tipo de Resposta	Frequência absoluta	Frequência relativa
Em branco	2	2,25%
Explicaram e exemplificaram de maneira errada	20	22,47%
Explicaram de maneira errada mas exemplificaram de maneira correta	7	7,87%
Explicaram de maneira parcialmente correta e exemplificaram de maneira errada ou não exemplificaram	10	11,24%
Explicaram de maneira parcialmente correta e exemplificaram de maneira correta	24	26,97%
Explicaram corretamente mas exemplificaram de maneira errada	13	14,60%
Explicaram corretamente e exemplificaram de maneira correta	13	14,60%

O resultado exposto na tabela mostra que apenas uma parcela muito pequena dos alunos foi capaz de apresentar uma definição e

exemplos, de uma forma coerente, a fim de explicar cada uma das técnicas de contagem. As respostas apresentadas nas avaliações ilustram que os alunos não conseguem desvincular as técnicas de contagem de situações particulares, ou seja, eles querem que o problema inteiro se encaixe em alguma das versões do algoritmo da permutação. Com esse pensamento eles ficam incapazes de modelar apropriadamente o problema mais simples de contagem que esteja presente em livros de Ensino Médio.

3 A boa técnica!

Prever os resultados de uma técnica ou mesmo mensurar a qualidade de seus efeitos é algo muito delicado. Mesmo após a experimentação continuada e realizada em vários contextos distintos não é possível garantir que ela será sempre eficaz. Desta forma é importante que o professor esteja dotado de um grande arsenal de opções, ao qual possa recorrer quando uma técnica com a qual está mais habituado falhar. Apoiado nas ideias sobre resolução de problemas expostas por Polya (um dos matemáticos a apresentar um conjunto de técnicas específicas para o ensino de matemática) e aprimoradas por Alan Schoenfeld (Professor na Universidade de Berkeley premiado por suas investigações em educação matemática e desenvolvimento cognitivo) pode-se afirmar que um problema deve ser atacado em algumas etapas:

- i) compreensão;
- ii) construção de uma estratégia;
- iii) execução da estratégia;
- iv) revisão da solução.

3.1 Compreensão

É muito comum que na fase da compreensão algumas confusões ocorram, principalmente se essa fase for tratada com desleixo. Uma grande gama de erros pode ser evitada se aquele que resolve o problema se põe na obrigação de gerar exemplos do que é pedido e investigar quais condições que ele está sendo obrigado a obedecer para satisfazê-las. Nesse momento da investigação pode-se tomar como referência problemas semelhantes já resolvidos ou iniciar a construção de uma árvore de possibilidades, isto é, listar uma a uma as possibilidades a serem

contadas afim de perceber padrões e ter total compreensão das regras que permeiam a formação dos agrupamentos.

Um dos prejuízos que o desprezo por essa etapa pode causar foi observado diversas vezes nas provas analisadas. Em uma das questões da avaliação se perguntava:

Se no tabuleiro da baiana em Salvador tem mungunzá, caruru, vatapá, sarapatéu e acarajé. E ela fez a seguinte promoção: quaisquer dois quitutes (distintos ou não) por R\$3,00. De quantas maneiras você pode fazer suas escolhas?

Um dos alunos respondeu que $5 \times 5 = 25$, eram as formas de se escolher os dois quitutes, sem perceber que escolher mungunzá e caruru é o mesmo que escolher caruru e mungunzá.

3.2 Construção de uma estratégia

Aquele que se propõe a resolver o problema deve conseguir encontrar conexões entre os

dados, as condições dadas e o que se pergunta. Isso pode ser feito partindo-se de uma ideia nova, por meio do desenvolvimento dos axiomas, corolários, lemas e teoremas associados à teoria abordada no problema ou ainda comparando a situação proposta atualmente com alguma outra semelhante. Na maioria das vezes faz-se opção pela tática de usar o que se aprendeu em problemas correlatos. Como já comentado, essa técnica exige atenção e uma série de indagações: Será possível usar o método que resolveu outro problema nesta questão? É necessário acrescentar ou retirar alguma condição que foi proposta?

O fluxograma que segue é um caminho para orientar os alunos a fazerem uma análise mais direcionada, a fim de tomar decisões mais acertadas sobre que técnicas de contagem que se deve usar para atacar os problemas, configurando mais uma opção para a construção de uma estratégia eficaz.

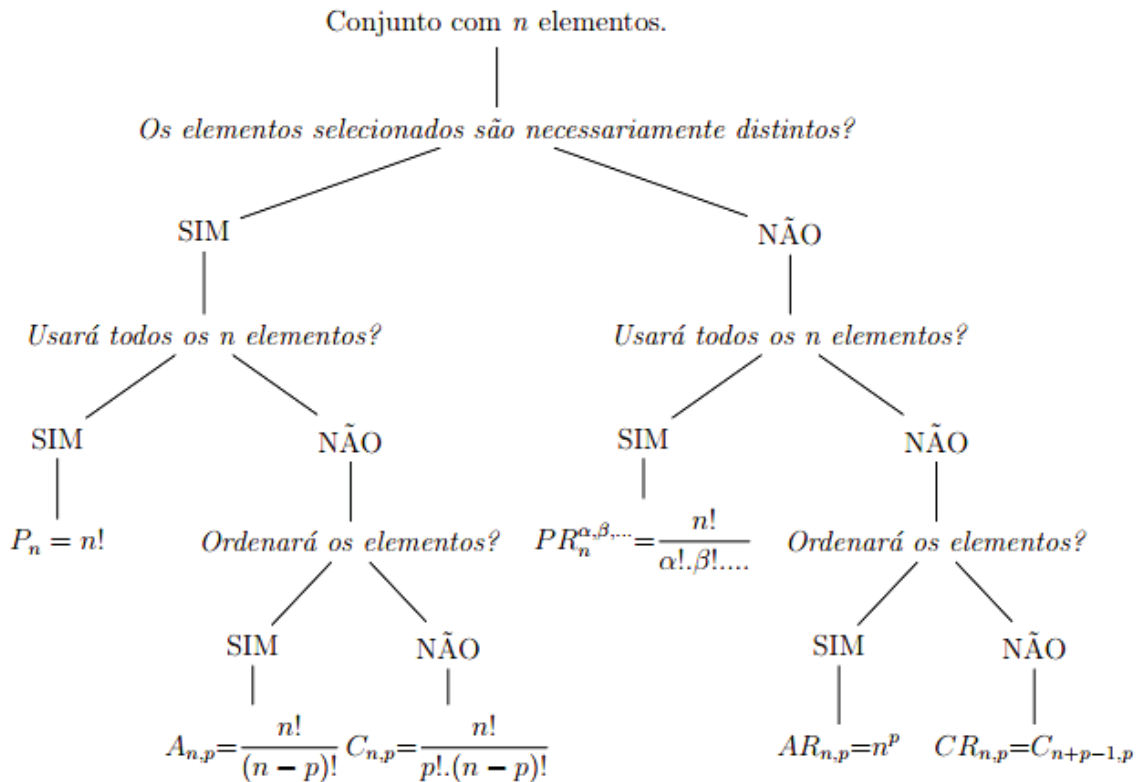


Figura 1: Fluxograma para auxiliar tomada de decisões na construção da estratégia.

De forma nenhuma o fluxograma pode ser considerado como um caminho pronto ou como um método que dará a resposta aos problemas

de Análise Combinatória, mas sim como um guia sobre a série de questionamentos que devem ser feitos, após ter consciência das regras

estabelecidas nas situações de contagem, a fim de decidir que recursos deverão ser empregados para realizar as contagens de forma eficaz e eficiente. O fluxograma também deve ser utilizado para ajudar na fixação dos conceitos de Análise Combinatória por parte dos alunos. Como vemos, em cada junção dos galhos existe uma pergunta e essa pergunta é um conceito de Análise Combinatória o qual deve estar entendido para saber qual o próximo ramo que devemos seguir.

Dentre as avaliações analisadas, um dos itens questionava:

Usando os 10 dígitos que conhecemos, quantas senhas você pode montar de 4 dígitos?

Apesar de ser um problema que a maioria dos estudantes que já estudaram a disciplina consideraram simples, ao avaliar as respostas dadas, grande parte dos alunos, possivelmente remeteram-se a questões semelhantes já resolvidas, consideraram que a resposta seria o produto $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$. Percebe-se que há compreensão do princípio que deveria ser empregado na contagem mas os mesmos erraram ao interpretar uma condição, a de que o problema não impõe que os dígitos usados nas senhas sejam diferentes.

Guiados pelo diagrama, a primeira coisa que o aluno precisa observar é justamente a possibilidade de repetir ou não os elementos que dispõem.

3.3 Execução da estratégia

Segundo Mendes, o ensino de matemática deve estar baseado em um pressuposto que possibilite a condução do aluno a uma construção constante das noções matemáticas presentes em cada atividade. Entre as ações sugeridas para garantir a condução, o texto propõe que as atividades devem apresentar-se de maneira auto-orientadas, para que permitam aos alunos a autocondução durante a construção de sua aprendizagem. O algoritmo que apresentamos se presta a essa autocondução, sem abrir mão de outras fases, a saber: Verbalização, Manipulação / Experimentação e Simbolização / Abstração.

Chamaremos de **Pensamento Combinatório** a capacidade daquele que resolve o problema de

gerar as combinações possíveis atendendo as condições impostas no problema. É necessário investir no desenvolvimento desta habilidade antes de passar às etapas propostas por Polya, a saber: compreensão do problema, construção de uma estratégia de resolução, execução da estratégia e revisão da solução. Para fazer uso do algoritmo o aluno precisa ter posto seu Pensamento Combinatório em ação, precisa ter dedicado um tempo na geração de exemplos e na discussão desses exemplos mas, mesmo tendo cumprido essa etapa corretamente, ainda pode apresentar dificuldades em gerar um algoritmo e em seguida uma formalização para o problema. O uso do fluxograma apresenta uma possibilidade de vencer essa dificuldade.

3.3.1 Algumas aplicações do fluxograma na execução da estratégia

O procedimento que será exemplificado irá dar suporte àquele que resolve os problemas a fim de evitar erros de interpretação ou erros por falta de atenção.

Segue o problema:

A administração de determinado condomínio é feita por uma comissão colegiada formada de 8 membros: síndico, subsíndico e um conselho consultivo composto de seis pessoas. Note que há distinção na escolha de síndico e subsíndico enquanto não há esta distinção entre os membros do conselho consultivo. Sabendo que 10 pessoas se dispõem a fazer parte de tal comissão, determine o número total de comissões colegiadas distintas que poderão ser formadas com essas 10 pessoas.

A fim de determinar o número de comissões colegiadas, vamos dividir a escolha de seus membros em duas etapas. Na primeira delas iremos nos preocupar com a escolha do síndico e do subsíndico. Nessa etapa temos 10 pessoas disponíveis para os dois cargos, sabemos que a mesma pessoa não poderá ocupar os dois cargos, portanto precisamos escolher duas pessoas distintas, e além disso é necessário compreender que escolher A para o cargo de síndico e B para o cargo de subsíndico não constitui a mesma escolha de B para síndico e A para subsíndico. Assim, seguindo as orientações do fluxograma:

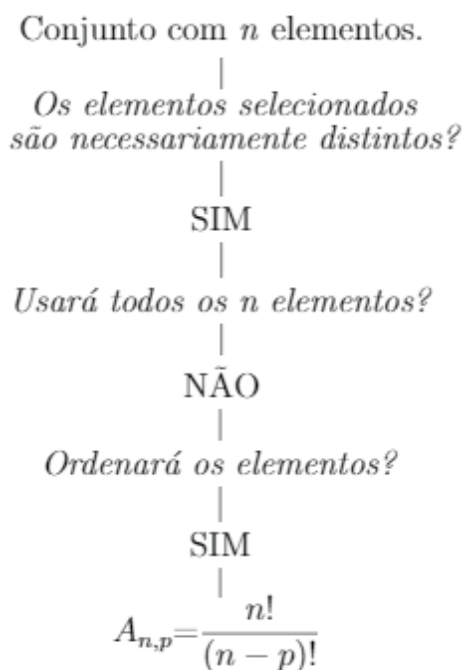


Figura 1: Aplicação do fluxograma

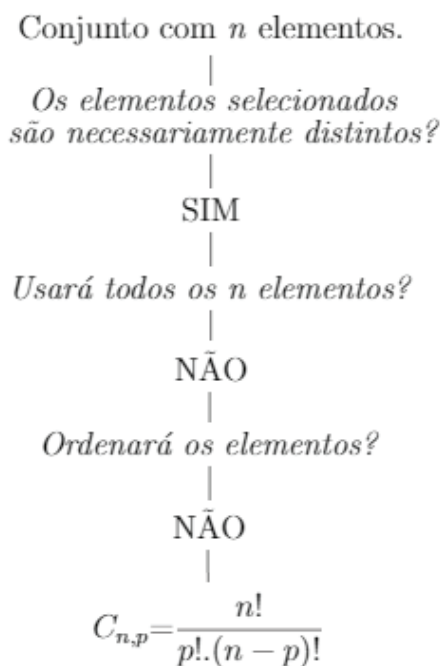


Figura 2: Aplicação do fluxograma

Dessa forma, o número de maneira de selecionar duas pessoas, entre as 10 dispostas, para ocupar os cargos de síndico e subsíndico será dado por $A_{10,2} = 90$.

Na segunda etapa, teremos que escolher os seis membros do conselho consultivo. Essa seleção deve ser feita levando-se em conta que agora há apenas oito pessoas habilitadas para compor este conselho, pois dos dez que haviam no início dois já foram selecionados para os cargos de síndico e subsíndico. Assim, observa-se que as pessoas selecionadas devem ser distintas, que dos oito apenas seis serão selecionados e que a ordem em que a seleção dos seis componentes do conselho é feita não determinará conselhos distintos, logo tem-se:

Portanto o número de conselhos consultivos que podem ser formados será dado por $C_{8,6} = 28$. A formação da comissão colegiada foi dividida em duas etapas: A escolha de síndico e subsíndico, que pode ser feita de 90 maneiras distintas, e a escolha do conselho consultivo, que pode ser feita de 28 maneiras distintas. Dessa forma, será possível escolher a comissão colegiada de $90 \cdot 28 = 2520$ maneiras distintas.

Segue o enunciado de mais um problema:

De quantas maneiras se pode alinhar 6 caixas, sendo 3 pretas e indistinguíveis entre si e 3 brancas e indistinguíveis entre si?

Temos 6 caixas idênticas 3 a 3. Iremos então denominá-las de P e B. Assim ao alinhar as caixas teríamos configurações do tipo PBPBPB, PPPBBB, PPBPBB, etc. O que se pode perceber é que em todas as configurações usamos todas as caixas mas que as caixas não são todas distintas e, ao tomarmos uma configuração qualquer, e.g., PPPBBB teremos a mesma configuração se trocarmos a posição das duas primeiras caixas. Assim, devemos considerar que

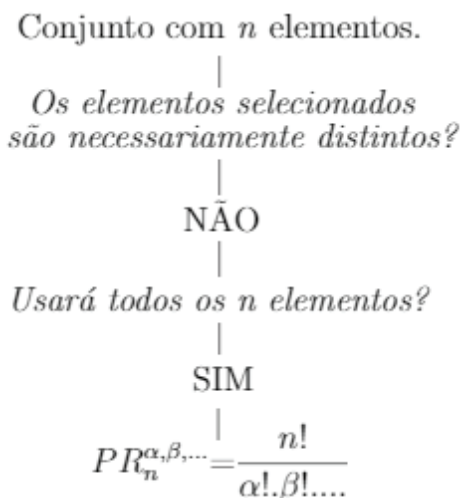


Figura 3: Aplicação do fluxograma

Dessa forma, há $PR_{6,3,3} = 20$ maneiras diferentes de alinhar as seis caixas.

3.4 Revisão da solução

É importante observar que o uso do fluxograma não deve podar em nenhum momento a criatividade do aluno, ele deve ser usado como uma orientação para as suas escolhas, definidas após a criação dos exemplos. Observe também que o aluno deve ter claro o significado de: usar todos os elementos, a ordem importa ou não, o que significa usar elementos repetidos, etc, ou seja, é fundamental que o aluno já tenha estudado todos os tópicos presentes no fluxograma, já que eles indicam a saída do algoritmo. Tal conhecimento prévio permite, posteriormente, uma análise crítica do resultado obtido. Assim, o fluxograma utilizado como uma ferramenta de apoio, após estudados todos os tópicos e nunca como substituição ao ensino dos mesmos, enxerga-se clara melhora na execução da estratégia.

Ainda pode-se usar o fluxograma na revisão da solução, guiando-se para analisar se todos os detalhes que levam à resposta foram considerados.

Por exemplo, no problema:

Usando os algarismos 2, 3, 4, 5, 6, 8 e 9, sem repetição, quantos números pares de três algarismos e maiores que 234 pode-se formar?

Um aluno deu a seguinte resposta:

Casa dos 200: eu teria o número 238, além das possibilidades 1.4.3 pois o primeiro algarismo teria que ser o 2, portanto, só uma chance, o último algarismo seria um dos 3 pares restantes das opções, e o segundo algarismo seria tudo o que restou, lembrando de retirar o 3.

Casa dos 300: 1.5.4 = 20

400: 1.5.3 = 15

500: 1.5,4 = 20

600: 1.5.3 = 15

700: 1.5.4 = 20

800: 1.5.3 = 15

900: 1.5.4 = 20

depois fiz 20.4 + 15.3 + 1.12 + 1 = 138

A resposta para o problema entretanto é 119. Não é a toa que, recorrentemente, chamamos atenção a importância que deve ser dada à construção dos exemplos e à discussão das regras que permitem gerar cada um deles. É este procedimento que irá dar suporte preciso àquele que resolve o problema a fim de evitar erros de interpretação ou erros por falta de atenção. Perceba que o equívoco cometido não é conceitual, os princípios aditivo e multiplicativo estão corretamente aplicados, a obediência da regra de usar algarismos sem repetição também está atendida. A solução proposta não está correta por terem sido considerados números começados com o algarismo 7, sendo que este não está disponibilizado no problema e também por não ter sido incluído na contagem o número 236, que poderia ter sido facilmente identificado se a listagem com os números tivesse começado a ser construída, já que posto em ordem crescente seria o primeiro a atender todas as exigências. O fluxograma, apesar de não ser necessário para solução do problema poderia ter sido usado para conferir pontos importantes da solução.

4 Conclusões

Neste artigo, apresentamos uma prática didática construída com base na necessidade de manipulação antes da formalização de uma estratégia. O fluxograma apresentado não deve ser entendido de maneira alguma como um método que dará a resposta dos problemas de Análise Combinatória e sim como um guia sobre que questionamentos devem ser feitos, após ter consciência das regras estabelecidas nas

situações de contagem, a fim de decidir que recursos deverão ser empregados para realizar as contagens de forma eficaz. Enfatizamos que, para um uso eficaz do fluxograma, os alunos devem ter estudado previamente todos os tópicos presentes no fluxograma e que o uso do mesmo na resolução de exercícios permite uma revisão constante dos conceitos nele presentes, ajudando na fixação dos conceitos básicos de Análise Combinatória.

Pós Graduação em Matemática em Rede Nacional.

Agradecimentos

Agradecimentos ao CNPq, CAPES/PROCAD, UFRN, IFRN e ao PROFMAT pela oportunidade de pesquisa e formação. Também agradecemos a todos os que fazem a Revista Ciência e Natura, editada e publicada pelo Centro de Ciências Naturais e Exatas da Universidade Federal de Santa Maria, pela oportunidade de divulgação deste artigo.

Referências

MORGADO, A.C., de Carvalho, J.B.F., Carvalho, P.C.P., e Fernandez, P.J. (2006). *Análise Combinatória e Probabilidade: com as soluções dos exercícios*. Coleção do Professor de Matemática. Impa/Vitae.

DEVLIN, Kheit. (2009). *O Instinto Matemático*. Record.

POLYA, George. (1978). *A arte de resolver problemas*. Interciência, Rio de Janeiro.

SCHOENFELD, A.H. *Teaching problem solving in college mathematics: the elements of a theory and a report on the teaching general problem solving skills*. In R. Lesh, D. Mierkiewicz and M. Kantowski (Eds.), *Applied Mathematical Problem Solving*. Columbus, Ohio: Ohio State University, 1979.

MENDES, Iran Abreu (2001). *Ensino de Matemática por atividades: uma aliança entre o construtivismo e a história da Matemática*. Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Programa de Pós Graduação em Educação.

BEZERRA, José Rauryson Alves (2013). *Uma ferramenta didática para ajudar na fixação dos introdutórios de análise combinatória*. Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Programa de