

Uma Árvore de Pitágoras Explorando os Fractais no Ensino Médio

A Tree of Pythagoras Exploring Fractals in High School

Jakson Ney da Costa Reis

Mestrado em Matemática pelo IMPA e UFERSA, RN, Brasil

jaksonney@gmail.com

Resumo

A Matemática tem sua beleza estética como um dos principais atrativos. Há tempos padrões geométricos despertam a curiosidade de muitos matemáticos. É nesse universo da Geometria que um tema vem ganhando cada vez mais espaço, trata-se dos Fractais. Trabalhar essas estruturas fantásticas no Ensino Médio resgata a importância de mostrar a beleza presente na Matemática, além disso, o conteúdo é praticamente esquecido pelas escolas e quase sempre deixado de lado na elaboração dos currículos. Neste trabalho, propomos uma breve análise do fractal conhecido como Árvore de Pitágoras, mostrando como é possível trabalhar temas como Progressões Geométricas e Aritméticas de forma a despertar a curiosidade do aluno..

Palavras-chave: *Teaching of mathematics, fractals, patterns.*

Abstract

Mathematics has its aesthetic beauty as one of the main attractions. There are times geometric patterns arouse the curiosity of many mathematicians. Is this universe Geometry that a subject is gaining more space, it is of Fractals. Working these fantastic structures in high school redeems the importance of showing this beauty in mathematics, in addition, the content is virtually forgotten by schools and almost always overlooked in the development of curricula. In this paper, we propose a brief analysis of the fractal known as Tree of Pythagoras, showing how you can work topics like Arithmetic and Geometric Progressions in order to arouse the curiosity of the student.

Keywords: *Word1, word2, word3, word4, word5.*

1 Introdução

A Matemática figura há um bom tempo entre os grandes vilões dos índices de reprovação nas escolas em geral. A disciplina é vista quase que consensualmente pelo aluno, e – infelizmente – por alguns professores, como um conjunto de regras inflexíveis preestabelecidas, que devem ser seguidas à risca sem muito direito à interpretação e/ou interação dinâmica. Tal concepção dificulta uma aproximação por parte do aluno, que estabelece um pré-conceito em relação à Matemática. Entretanto, muitas vezes o docente corrobora com essa concepção deturpada da disciplina, afastando ainda mais o aluno da compreensão eficiente dessa tão importante ferramenta da ciência.

Para SILVEIRA (2002), existe na fala do aluno o sentido pré-constituído de que a Matemática é difícil. A autora verificou em seu estudo que grande parte dos professores de Matemática busca modos para tornar a Matemática mais fácil, assumindo eles mesmos que acham a disciplina difícil. Os professores identificam, na voz do aluno, que ela é considerada chata e misteriosa, que assusta e causa pavor, e por consequência, o aluno sente medo da sua dificuldade e vergonha por não aprendê-la. Esse conjunto de sentimentos ruins proporcionados pela disciplina aos alunos, destrói qualquer possibilidade de aproximação da Matemática. Resulta desse quadro que o aluno desenvolve uma antipatia pela disciplina.

Neste trabalho, veremos atividades que visam tornar o ensino de Matemática instigante e divertido. Usaremos como subsídio para tal um dos principais atrativos da Matemática: a sua beleza estética. E nesse aspecto, a Geometria merece um lugar de destaque. Esse ramo da Matemática é rico em elementos concretos que favorecem a percepção espacial e a visualização, características que dão a professor e aluno suporte para desenvolverem uma relação ensino-aprendizagem mais eficiente.

Quando o tema é Geometria, ganha um destaque ímpar nesse cenário uma área que, ultimamente, despontou no cenário da Educação Matemática, trata-se da Geometria Fractal (BRANDÃO (2002); BAIER (2005); SALLUM (2005); GOUVEA (2005) ; ALMEIDA (2006); GONÇALVES (2007); PALLES (2007)).

A renovação das práticas pedagógicas de Matemática é um grande desafio. Teóricos como Vygotski e Skinner alertam para falhas no sistema de educação que acabam atrasando a reformulação do modelo de aprendizagem. Para Skinner,

Estamos no limiar de uma época excitante e revolucionária, na qual o estudo científico do homem será posto a serviço dos mais altos interesses humanos. A educação deve desempenhar a sua parte. Precisa aceitar o

fato de que uma revisão global das práticas educacionais é tanto possível como inevitável. SKINNER (1972)

O estudo da Geometria Fractal remeta à observação de elementos da natureza que podem ser explorados pelos alunos em aulas de campo, com o intuito de associação à Geometria fractal e padrões da natureza. Segundo Zazkis (2002), os padrões são o coração e a alma da Matemática, a Geometria e demais áreas da Matemática estão fundamentadas na generalização de padrões. Em VALE (2005), temos um amplo debate reforçando a Matemática como uma ciência que estuda os padrões. Os padrões da natureza retificam a harmonia presente na matemáticos. O processo de ensino de Matemática não pode ignorar este fato.

Neste trabalho destacaremos um dos mais importantes e belos fractais conhecidos: A Árvore de Pitágoras, também chamada Hipertexto Pitágoras. É um fractal que tem como base a conhecida figura do triângulo retângulo com quadrados construídos em cada um dos seus lados. O motivo do nome vem do histórico Teorema de Pitágoras, estudado desde o ensino fundamental até o mais alto nível acadêmico. O fractal foi construído pela primeira vez em 1942 pelo matemático alemão Albert Bosnam. Trata-se de uma sequência simples de interações que leva à construção de um dos mais belos fractais conhecidos.

2 A Árvore de Pitágoras

A Árvore de Pitágoras corresponde a uma construção que consta dos seguintes passos:

1. Construa um quadrado,
2. Usando como base o lados de cima deste quadrado, construa um triângulo retângulo tendo como hipotenusa a base;
3. Em seguida, nos dois catetos restantes do triângulo, construa dois novos quadrados cujos lados são exatamente os catetos;
4. A partir daqui repita os 3 passos anteriores para os dois novos quadrados.

A Árvore de Pitágoras pode variar de formato conforme os ângulos internos do triângulos que a compõem, podemos perceber isso claramente nas 1 e 2. Porém, para fins didáticos, vamos explorar apenas o caso em que os triângulos são todos isósceles. A chamada Árvore Simétrica de Pitágoras 2. Consideremos ainda o quadrado da base inicial de lado 1. Serão explorados oito elementos dessa figura:

1. O número de triângulos;

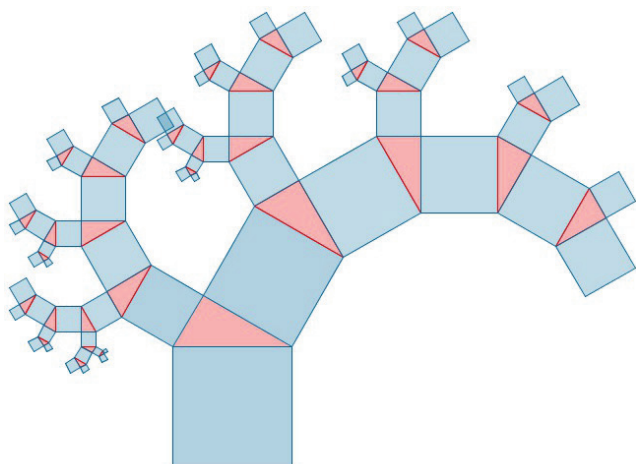


Figura 1: Detalhes de parte de uma Árvore de Pitágoras.

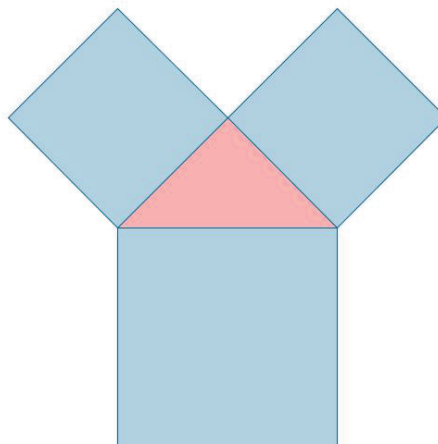


Figura 3: Base (Nível) para construção da Árvore de Pitágoras.

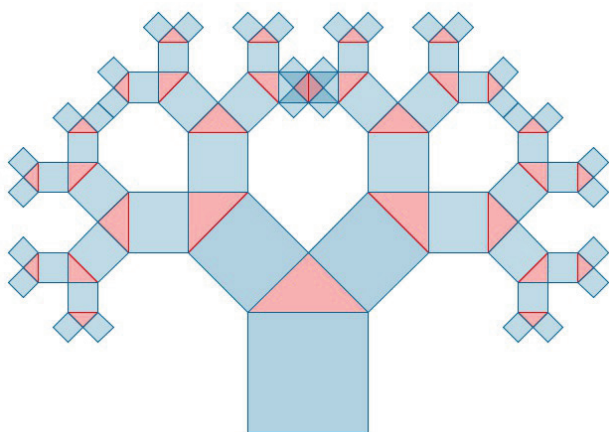


Figura 2: Parte da Árvore Simétrica de Pitágoras.

2. O número de quadrados;
3. O perímetro de cada triângulo;
4. O perímetro de cada quadrado;
5. A área de cada triângulo;
6. A área de cada quadrado;
7. O perímetro total;
8. A área total.

Em cada abordagem mostraremos como inserir temas do currículo do Ensino Médio.

Nas orientações e construções que se seguem, vamos chamar de Nível, cada conjunto formado por um triângulo retângulo com quadrados construídos em cada um dos seus lados, conforme 3

2.1 O número de triângulos

A figura inicial tem apenas 1 triângulo. No nível 2, note que cada cateto do triângulo anterior gera 2 novos quadrados, conseqüentemente 2 novos triângulos. No nível 3, os dois triângulos anteriores, que juntos possuem 4 catetos, vão gerar 4 quadrados e estes darão origem a 4 triângulos. Pensando recursivamente, temos a seguinte seqüência:

$$(1, 2, 4, 8, 16, \dots)$$

Essa seqüência é claramente uma PG de razão $q = 2$ e primeiro termo $a_1 = 1$. De onde podemos observar que o número de triângulos em um determinado nível de interação é dado pelo termo geral dessa progressão. Chamemos t_n o número de triângulos da n -ésima interação, temos.

$$t_n = 2^{n-1} \tag{1}$$

Se a intenção for determinar o número total de triângulo acumulados em determinado nível, basta utilizar a soma dos n termos dessa PG. No caso, essa soma em função do nível n de interação pode ser expressa por,

$$S_n = 2^n - 1$$

2.2 O número de quadrados

Existem muitas formas de calcular o número de quadrados. Vamos recorrer novamente a um pensamento

indutivo e recursivo.

Começamos com 3 quadrados, conforme 3. Para efeitos práticos, vamos desconsiderar inicialmente o primeiro quadrado da base, posteriormente introduziremos ele ao resultado final, quando necessário. Sendo assim, no nível 1, temos 2 quadrados. No nível 2, cada quadrado serviu de base para formação de um triângulo e estes, por sua vez, dão origem a 4 novos quadrados. No nível 3 o processo se repete, gerando agora 8 novos quadrados. Em um pensamento indutivo, temos claramente a sequência,

$$(2, 4, 8, 16, \dots)$$

que sabemos se tratar de uma PG de razão $q = 2$ e primeiro termo $a_1 = 2$. Resulta então que o número de quadrados em cada nível será o termo geral dessa progressão (com exceção do primeiro nível que tem 3 quadrados). Então, denotemos por q_n , com $n \geq 2$, o número de quadrados da n -ésima interação, temos facilmente que,

$$q_n = 2^n \tag{2}$$

Novamente, se a intenção for o número total de quadrados acumulados na n -ésima interação, basta determinar a soma dessa PG, cuja expressão para a n -ésima interação, considerando-se a adição do quadrado inicial, é dada por,

$$S_n^* = 2^{n+1} - 1$$

2.3 O perímetro de cada triângulo

Como na nossa construção os triângulos são todos semelhantes (Caso AAA), para determinar o perímetro de cada um deles em função do nível de interação, precisamos investigar a razão de proporcionalidade entre um dos lados (no caso a base) dos triângulos de uma interação a outra e verificar se essa razão é constante. Para isso, vamos analisar a construção abaixo que descreve um ramo da Árvore de Pitágoras.

Note que o primeiro triângulo tem como base o lado do primeiro quadrado, no caso l . O segundo tem como base o lado do outro quadrado, que por sua vez é justaposto a um dos catetos do primeiro triângulo. Sendo assim, como o triângulo é retângulo isósceles de hipotenusa l , é fácil perceber que seus catetos medem $\frac{\sqrt{2}}{2}l$. Com isso temos que a base do segundo triângulo é exatamente $\frac{\sqrt{2}}{2}l$. Pela auto-similaridade dos fractais, podemos garantir que a proporcionalidade é constante. Como os triângulos usados na nossa construção são todos semelhantes, a razão de proporcionalidade entre os lados é a mesma razão entre os perímetros. Essa

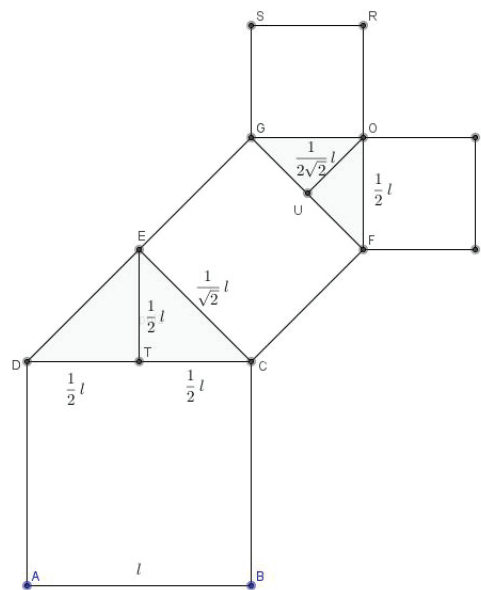


Figura 4: Detalhes de uma Árvore de Pitágoras. Razão de semelhança entre os triângulos

razão é a constante de proporcionalidade que, conforme observamos, vale $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Analisando nível por nível, vemos que no nível 1 de interação, o perímetro do triângulo é $p_1 = l + \sqrt{2}l = l(1 + \sqrt{2})$. Note que nossa sequência de perímetros será uma PG de razão $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e primeiro termo igual a $a_1 = l(1 + \sqrt{2})$. Como estamos interessado no perímetro de cada triângulo da n -ésima interação, basta determinar o termo geral da PG. Chamemos esse termo de p_n , simbolizando o n -ésimo perímetro. Temos,

$$p_n = l(1 + \sqrt{2}) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{n-1} \tag{3}$$

2.4 O perímetro de cada quadrado

Assim como na sessão anterior, vamos determinar a constante de proporcionalidade entre os lados dos quadrados. Da Figura 4, temos que o primeiro quadrado tem lado l , cada um dos quadrados seguintes tem lado $\frac{\sqrt{2}}{2}l$, logo a constante de proporcionalidade é $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Assim como na Seção 2.2, vamos considerar a contagem a partir do primeiro quadrado justaposto no cateto do primeiro triângulo. Então, considerando os quatro lados de cada quadrado, temos que a sequência que representa os perímetros procurados é uma PG de razão $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e primeiro termo $a_1 = 2\sqrt{2}l$. O perímetro do n -ésimo

quadrado é portanto o termo geral da PG em questão. Denotemos por l_n o perímetro de um dos n -ésimos quadrados, temos,

$$l_n = 4l \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n \tag{4}$$

Mais uma vez, para o nível 1, devemos adicionar os 4 lados do maior quadrado da base.

Esse resultado será especialmente importante para determinarmos o perímetro total do fractal.

2.5 A área de cada triângulo

Antes de iniciarmos nossa análise, vamos demonstrar a seguinte Proposição:

Proposição 1. *Sejam ABC e $A'B'C'$ dois triângulos semelhantes. Se k é a constante de proporcionalidade entre os lados desse triângulo, temos que a constante de proporcionalidade entre as áreas desse triângulo é k^2 .*

Demonstração. Sejam $\overline{BC} = a$, $\overline{B'C'} = a'$ e h e h' as alturas dos triângulos ABC e $A'B'C'$, respectivamente relativas às bases BC e $B'C'$. Com, por hipótese, eles são semelhantes, temos que $a = ka'$ e $h = kh'$.

Sabemos que a área $A(ABC) = \frac{ah}{2}$ e $A(A'B'C') = \frac{a'h'}{2}$, daí

$$\frac{A(ABC)}{A(A'B'C')} = \frac{\frac{ah}{2}}{\frac{a'h'}{2}} = \frac{ah}{a'h'} = \frac{ka'kh'}{a'h'} = k^2$$

□

Como nosso objetivo é determinar a área de cada um dos triângulos gerados em uma n -ésima interação, para melhor focar nossa análise, consideraremos apenas um ramo da Árvore de Pitágoras, destacado em vermelho na figura abaixo.

De acordo com a Proposição 1, se conhecemos a razão de semelhança entre dois triângulos, a razão entre suas áreas será o quadrado desta razão. Sendo assim, vimos na Seção 2.3 que a razão entre dois lados de triângulos subsequentes é $\frac{\sqrt{2}}{2}$, logo, a razão entre as áreas será $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{1}{2}$. Com isso, se montarmos uma sequência com as áreas dos triângulos estudados temos,

$$\left(\frac{1}{4}l^2, \frac{1}{8}l^2, \frac{1}{16}l^2, \dots \right)$$

Fica claro que essa sequência é uma PG de razão $q = \frac{1}{2}$ e primeiro termo $a_1 = \frac{1}{4}l^2$. E o que estamos interessado é exatamente o n -ésimo termo dessa sequência. Chamemos de T_n esse valor, temos,

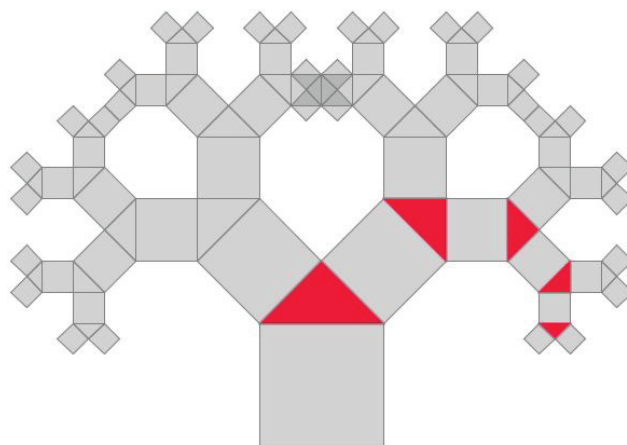


Figura 5: Triângulos considerados na análise

$$T_n = l^2 \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1}$$

Não devemos esquecer que essa é a área de apenas um dos triângulos na n -ésima interação.

Exemplo 1. *Qual a área de um dos triângulos na 4 interação?*

$$T_4 = l^2 \left(\frac{1}{2} \right)^5 = \frac{l^2}{32}$$

Esse valor é obtido em unidade de área.

2.6 A área de cada quadrado

Note que cada nível tem três quadrados associados a um triângulo, nesse caso, para facilitar nossa análise e afim de preencher a Tabela 1, consideraremos inicialmente apenas os quadrados justapostos aos catetos desses triângulos, posteriormente, quando necessário, adicionaremos a área do quadrado maior da base.

Na Seção 2.4, temos que a razão de proporcionalidade entre os lados é $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Fazendo uso mais uma vez da Proposição 1, concluímos que a razão entre as áreas de dois quadrado subsequentes é exatamente $\frac{1}{2}$. Considerando um dos quadrado justapostos ao primeiro triângulo como primeiro elemento de nossa sequência, temos que, sendo seu lado $\frac{\sqrt{2}}{2}l$, sua área é $a_1 = \frac{1}{2}l^2$. Montando uma sequência com as áreas de cada quadrado em relação ao nível de interação do fractal, temos,

$$\left(\frac{1}{2}l^2, \frac{1}{4}l^2, \frac{1}{8}l^2, \frac{1}{16}l^2, \dots \right)$$

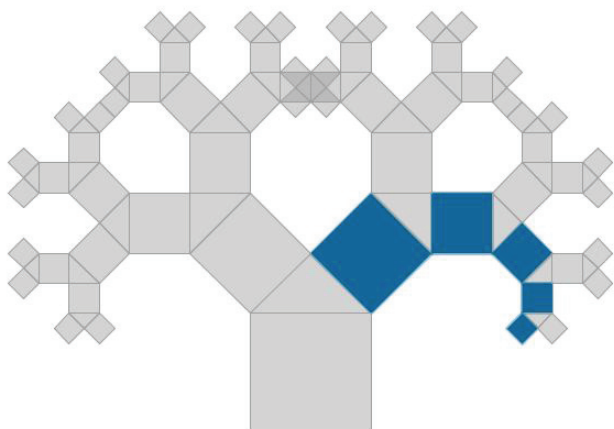


Figura 6: Quadrados que inicialmente entram na contagem

Novamente temos uma PG cuja razão é $q = \frac{1}{2}$ e o primeiro termo $a_1 = \frac{1}{2}l^2$. Seu termo geral representa a área de um dos quadrados da n -ésima interação. Segue daí que, seja Q_n a área desse n -ésimo quadrado, podemos definir Q_n como,

$$Q_n = l^2 \left(\frac{1}{2}\right)^n \tag{5}$$

2.7 Perímetro total

Vamos analisar os traçados em vermelho, azul e verde da Figura 7 abaixo que mostra a Árvore de Pitágoras no seu nível 5 de interação:

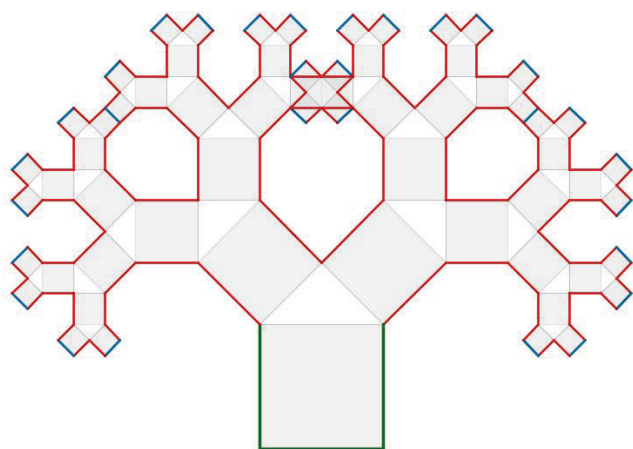


Figura 7: Perímetro da Árvore de Pitágoras no seu nível 5.

Temos que os lados dos triângulos não fazem parte do perímetro do fractal, além disso, o primeiro e os úl-

timos quadrados da figura contribuem com 3 de seus lados para compor o perímetro e todos os demais quadrados contribuem com apenas dois lados. Embora a Figura 7 represente apenas os cinco primeiros níveis de interação, a auto-similaridade do fractal nos garante que o raciocínio acima pode ser estendido à n -ésima interação. Sendo assim, a ideia é dividir o processo em três partes: 1 - calcular o traçado verde (simples); 2 - Calcular o traçado vermelho; 3 - Calcular o traçado azul. Nas análises anteriores, já reunimos elementos suficientes para determinar o perímetro total da Árvore de Pitágoras em função do seu nível n de interação.

Seja P_n esse perímetro, temos que,

$$P_n = A + B + C$$

Onde,

$A =$ Traçado Verde; $B =$ Traçado Vermelho; $C =$ Traçado Azul

1. Traçado Verde:

Esse é o mais simples de todos, é composto por 3 lados do primeiro quadrado, logo,

$$A = 3l$$

2. Traçado Vermelho

Antes de calcular B, vamos enunciar e demonstrar a seguinte Proposição:

Proposição 2. O produto ordenado termo a termo de duas Progressões Geométricas ainda é uma Progressão Geométrica, e sua razão é o produto das razões das duas Progressões iniciais.

Demonstração. Sejam $x = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ e $y = (b_1, b_2, b_3, \dots, b_n)$ duas PGs de razão r e q , respectivamente.

Tomemos $z = (c_1, c_2, c_3, \dots, c_n)$, onde $c_i = a_i b_i$, para $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Temos,

$$\frac{c_i}{c_{i-1}} = \frac{a_i b_i}{a_{i-1} b_{i-1}} = \frac{a_i}{a_{i-1}} \cdot \frac{b_i}{b_{i-1}} = r q$$

Portanto $z = (c_1, c_2, c_3, \dots, c_n)$ é uma PG e sua razão é o produto das duas PGs iniciais

□

Na Seção 2.2, vimos que o número de quadrados em cada nível é dado pela PG (2, 4, 8, 16). Cujo termo geral é dado por, $q_n = 2^n$

Já na Seção 2.4, temos que o perímetro de cada quadrado também é dado por uma PG $(2\sqrt{2}l, 2l, \sqrt{2}l, \dots)$.

Cujo termo geral é $l_n = 4l \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$.

Logo, o perímetro de todos os quadrados no n-ésimo nível é dado pelo produto dos termos gerais das duas PGs acima. Esse novo termo geral representa a PG definida pelo produto termo a termo das sequências apresentadas nas Seções 2.2 e 2.4, dada por

$$(4\sqrt{2}l, 8l, 8\sqrt{2}l, \dots)$$

que, de acordo com a Proposição 2, também é uma PG, cujo primeiro termo é $a_1 = 4\sqrt{2}l$ e a razão é $q = \sqrt{2}$. O que estamos interessados é na soma dos termos dessa PG, na verdade, como cada quadrado contribui com apenas dois lados, queremos metade dessa soma, daí

$$B = (4 + 2\sqrt{2})((\sqrt{2})^n - 1)$$

3. Traçado Azul

Para determinar o comprimento do traçado azul, basta calcular a quarta parte do produto das equações 2 e 4, que representam, respectivamente, o número de quadrados e o perímetro de cada quadrado no n-ésimo nível do fractal. Seguindo o mesmo raciocínio do item anterior,

$$C = l(\sqrt{2})^n$$

Logo,

$$P_n = l[(2\sqrt{2} + 5)(\sqrt{2})^n - (2\sqrt{2} + 1)] \tag{6}$$

Note que a sequência tende ao infinito para n suficientemente grande. De fato,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} l[(2\sqrt{2} + 5)(\sqrt{2})^n - (2\sqrt{2} + 1)] &= \\ l[(2\sqrt{2} + 5) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2})^n - \lim_{n \rightarrow \infty} (2\sqrt{2} + 1)] &= \\ l(2\sqrt{2} + 5) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2})^n - l(2\sqrt{2} + 1) &= \infty \end{aligned}$$

Ou seja, a Árvore de Pitágoras tem perímetro infinito quando n tende ao infinito. Um fato curioso, visto que o perímetro de cada quadrado, visto na equação 4, tende a zero quanto n tende ao infinito.

2.8 A Área total

A área total da Árvore de Pitágoras é simplesmente a soma das áreas de todas os quadrados e triângulos. Já temos elementos suficientes para determiná-la. Chame-mos A_n a área total em cada nível de interação, daí

$$A_n = (\text{Área de cada triângulo}) \times (\text{Número de triângulos}) + (\text{Área de cada quadrado}) \times (\text{Número de quadrado})$$

Ou seja, considerando os resultados obtidos nas Seções 2.1, 2.2, 2.5 e 2.6 temos que,

$$A_n = T_n \cdot t_n + Q_n \cdot q_n$$

Obtemos um resultado surpreendente:

$$A_n = \frac{5}{4}l^2 \tag{7}$$

para¹ todo $n \geq 2$, onde l é o lado do primeiro quadrado justaposto à hipotenusa do triângulo no nível 1.

A Tabela 1 mostra o que acontece com os valores de A_n supondo $l = 6$ e considerando até o vigésimo nível do fractal.

Tabela 1: Área total da Árvore de Pitágoras

n	T_n	t_n	Q_n	q_n	A_n
1	9,00000	1	18,00000	2	45,00
2	4,50000	2	9,00000	4	45,00
3	2,25000	4	4,50000	8	45,00
4	1,12500	8	2,25000	16	45,00
5	0,56250	16	1,12500	32	45,00
6	0,28125	32	0,56250	64	45,00
7	0,14063	64	0,28125	128	45,00
8	0,07031	128	0,14063	256	45,00
9	0,03516	256	0,07031	512	45,00
10	0,01758	512	0,03516	1.024	45,00
11	0,00879	1.024	0,01758	2.048	45,00
12	0,00439	2.048	0,00879	4.096	45,00
13	0,00220	4.096	0,00439	8.192	45,00
14	0,00110	8.192	0,00220	16.384	45,00
15	0,00055	16.384	0,00110	32.768	45,00
16	0,00027	32.768	0,00055	65.536	45,00
17	0,00014	65.536	0,00027	131.072	45,00
18	0,00007	131.072	0,00014	262.144	45,00
19	0,00003	262.144	0,00007	524.288	45,00
20	0,00002	524.288	0,00003	1.048.576	45,00

Isso significa que a cada nível a área aumenta um valor constante de $\frac{5}{4}l^2$, independente de n . O que podemos, inclusive, interpretar como uma PA de primeiro termo $a_1 = \frac{9}{4}l^2$ e razão $r = \frac{5}{4}l^2$, cujo n-ésimo termo representa a área total acumulada do fractal. Chamemos de F_n essa área, temos facilmente que,

$$F_n = l^2 \left(\frac{5n + 4}{4} \right) \tag{8}$$

Isso mostra que a área total da Árvore de Pitágoras que construímos tende ao infinito para um n suficientemente grande. Novamente nos surpreendemos, pois

¹No nível 1 devemos somar l^2 ao resultado

foge totalmente do nosso senso comum o fato de uma região limitada apresentar área infinita.

Com as equações obtidas, muitas atividades podem ser elaboradas. Além de outros questionamentos que podem vir a surgir. Fica a certeza de que os fractais podem servir de base para muitos temas da Matemática do Ensino Médio, basta um pouco de criatividade e força de vontade por parte do professor.

3 Conclusão

O estudo dos fractais abre muitas portas no tocante ao ensino de Matemática. A beleza dos fractais serve como incremento para buscar no aluno interesse no estudo da Matemática. Privá-lo de conhecer e vislumbrar os fractais é um erro inconcebível. BARBOSA (2005) nos lembra que o estudo da Geometria Fractal ajuda tanto na compreensão de conteúdos presentes no currículo escolar como no despertar da existência do belo na natureza e na Matemática, fatores que ajudam substancialmente o aluno a desenvolver de forma mais eficiente conceitos matemáticos "desinteressantes" do ponto de muitos livros didáticos atuais.

Mostramos como os conceitos de Progressão Geométrica, Análise Combinatória e Noções de Geometria Plana podem ser bem explorados usando os fractais como base.

Concluimos o trabalho na certeza de que o universo dos fractais é capaz de expandir a visão dos alunos sobre as belezas e aventuras no mundo das descobertas que a Matemática pode proporcionar. Tornar a Matemática uma disciplina prazerosa é o caminho para uma prática pedagógica mais eficiente.

Referências

- ALMEIDA, A. A. O. (2006). Os fractais na formação docente e sua prática na sala de aula. Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica – PUC, São Paulo-SP.
- BAIER, T. (2005). O nexos "geometria fractal – produção da ciência contemporânea" tomado como núcleo do currículo de matemática do ensino básico. Tese de Doutorado, Universidade Estadual Paulista – UNESP, Rio Claro - SP.
- BARBOSA, R. M. (2002). *Descobrendo a geometria fractal para a sala de aula*. Belo Horizonte.
- BARBOSA, R. M. (2005). *Descobrendo a geometria fractal para a sala de aula*. Belo Horizonte.
- BRANDÃO, L. d. O. (2002). *Algoritmos e Fractais com programas de GD*, vol 49, Revista do Professor de Matemática, São Paulo, pp. 27–34.
- BRASIL (1998). *PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais): Ensino Fundamental – Bases Legais*, Brasília, p 25.
- GONÇALVES, A. G. N. (2007). Uma sequência de ensino para o estudo de progressões geométricas via fractais. Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica – PUC, São Paulo-SP.
- GOUVEA, F. R. (2005). Um estudo de fractais geométricos através de caleidoscópios e softwares de geometria dinâmica. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual Paulista – UNESP, Rio Claro - SP.
- PALLESI, D. M. (2007). Motivação do estudo de progressões aritméticas e geométricas através da geometria fractal.
- SALLUM, E. M. (2005). *Fractais no Ensino Médio.*, vol 57, Revista do Professor de Matemática, São Paulo, pp. 1–8.
- SILVEIRA, M. R. A. (2002). "matemática é difícil": Um sentido pré-constituído evidenciado na fala dos alunos. .
- SKINNER, B. F. (1972). *Tecnologia do ensino*. São Paulo.
- VALE, T., I.; PIMENTEL (2005). *Padrões: um tema transversal no currículo.*, vol 85, Revista Educação e Matemática, Portugal, pp. 14–20.
- Zazkis, P., Rina; Liljedahl (2002). Generalization of patterns: the tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics*, 49(3), 379–402.