

## O uso de Dobraduras como recurso para o ensino da geometria plana: história, teoremas e problemas.

Use of folding as a resource for the teaching of plane geometry:  
stories, theorems and problems.

Daniel Brandão Menezes<sup>1</sup> e Jonatan Floriano da Silva<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Mestre em Matemática pelo Profmat - Professor da Universidade Christus nos cursos de Engenharia Civil e de Produção e Arquitetura. Universidade Federal do Ceará, Brasil  
brandaomenezes@hotmail.com

<sup>2</sup>Universidade Federal do Ceará, Brasil  
jonatanfloriano@gmail.com

### Resumo

*A preocupação no desempenho do professor do ensino básico, mediante a nova realidade da educação matemática brasileira motivou o início deste estudo, uma vez que a aprendizagem sofre constantes modificações e daí a necessidade de acompanhar as mudanças ocorridas em tal cenário. Diante disso, o objetivo deste trabalho é possibilitar uma fonte literária para o professor do ensino básico que aprofunde seu conhecimento teórico a fim de transmitir o conteúdo de Geometria Euclidiana Plana com o uso de materiais concretos em suas salas de aula. A metodologia utilizada foi o levantamento bibliográfico de obras que focam os principais resultados necessários ao aprendizado do tema de geometria ensinado por meio de dobras. Como resultado, pode-se citar a criação de um texto sobre a história das dobras, Teoremas e problemas que envolvem a geometria e o modo diverso de resolvê-los, por meio de uma forma lúdica e também teórica.*

**Palavras-chave:** Geometria Plana. Matemática – Estudo e ensino. origami.

### Abstract

*The concern in the performance of school teachers through the new reality of the Brazilian mathematics education motivated the beginning of this study, since learning undergoes constant changes and hence the need to monitor the changes in such a scenario. Thus, the objective of this work is to enable a literary source for school teachers to deepen their theoretical knowledge in order to convey the contents of Euclidean Plane with the use of concrete materials in their classrooms. The methodology used was the literature survey of articles that focus on the main results needed for the theme of geometry taught through learning folds. As a result, we can mention the creation of a text on the history of folding, theorems and problems involving geometry and the different ways of solving them, through a playful and also theoretically.*

**Keywords:** Plane Geometry. Mathematic - Studying and teaching. Origami.

## 1 Introdução

A formação dos professores do Ensino Básico tem sido motivo de discussões no cenário educacional brasileiro, uma vez que os índices de qualificação escolar não apresentam resultados positivos, seja na aprovação anual, para atingir a nova série, na tentativa de concursos ou vestibulares, até mesmo, no mercado de trabalho. Essa realidade se torna mais alarmante quando se trata da disciplina de Matemática quando os jovens por motivos diversos encontram dificuldades em seu aprendizado. Muitas tentativas de sanar tais deficiências são propostas como realizar uma formação continuada com o docente a fim de que esteja sempre aprimorando as ferramentas de ensino utilizadas em sala de aula. Quando se trata de ensinar uma disciplina no ensino básico, muitos questionamentos devem ser feitos previamente: Por que? Para quê? O que? Para quem? Tais dúvidas não envolvem somente os alunos como também o docente e, portanto, exigirá uma performance mais qualificada desse profissional.

O ensino de uma disciplina, seja qual for, não poderá suprimir tais questionamentos, pois envolvem uma amplitude de conhecimento que a atual sociedade tem cobrado no cotidiano. Ou seja, ensinar não significa mais só transmitir um determinado conhecimento por meio de uma aula tradicional e sim, criar mecanismos que naturalmente norteiam o aluno ao encontro da aprendizagem e a situações que propiciem a aplicação da teoria na prática. Essa é uma situação preocupante para a disciplina de matemática, já que os professores não tiveram, quando estudavam ainda no ensino básico, um modelo educacional voltado para essa nova visão de ensino. Eis o maior desafio para a formação de docentes: torná-los aptos a trabalharem nos novos moldes que a educação exige e, concomitantemente, capazes de aplicar o conhecimento com novas possibilidades em suas salas de aula.

“A situação ensinar/aprender é norteadada pela satisfação que o indivíduo sente em usar a ciência para seu ajustamento ao meio, para suavizar suas lutas, para resolvendo problemas dar-lhe maior condição de cidadão. É nessa direção que se providencia a formação de hábitos, atitudes e desenvolvimento de habilidades que lhe possibilitarão ultrapassar barreiras e

desfrutar das oportunidades férteis que a vida moderna lhe apresenta.” (BRITTO, 1984, p. 150).

Todos esses comentários se revelam consoantes ao o que preconizados nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's), pois o desenvolvimento da educação trouxe consigo a necessidade de que os estudantes tenham a capacidade de solucionar problemas, uma postura diferenciada na tomada de decisões e interpretação das mais variadas situações, bem como, aperfeiçoar os valores sociais e de trabalho em equipe. Segundo ainda os PCN's, a comunicação por meio de códigos e a interpretação e modelagem de uma realidade são percebidas por meio da matemática, ou seja, é nessa disciplina que os alunos poderão criar muitos elos com a realidade e ajudá-los em seu aprendizado. A partir deste momento, a aprendizagem não será mais pontual e sim interdisciplinar voltado para o cotidiano como, por exemplo, a leitura e compreensão do espaço e das figuras na geometria. Segundo D'Ambrósio (1996), a matemática em sala de aula atua como:

“[...] uma estratégia desenvolvida pela espécie humana ao longo de sua história para explicar, para entender, para manejar e conviver com a realidade sensível, perceptível, e com o seu imaginário, naturalmente dentro de um contexto natural e cultural.” (D'AMBROSIO, 1996, p.7).

A resolução de problemas, além de ser trabalhada pela parte algébrica da matemática, possui atuação na geometria a partir do momento em que exige a capacidade de visualização de figuras planas ou espaciais e suas propriedades geométricas dos corpos encontrados usualmente. Essa é uma das áreas mais antigas e que se tem revelado uma aliada no ensino da matemática, pois inúmeros estudos são realizados com a geometria e materiais concretos, ou seja, o uso de material didático manipulável tem sido muito utilizado nos estudos do conteúdo de geometria.

Segundo Deneca e Pires (2008, p. 4), muitos foram os educadores que no transcorrer dos séculos falaram sobre a importância do material visual-tátil como ferramenta incentivadora do aprendizado, porém Carvalho (2011, p. 107) colabora afirmando que o material didático que pode ser manipulado não exerce função apenas

figurativa e sim deve ser dada ênfase às operações que podem ser desenvolvidas. Um interessante exemplo de material didático manipulável é o uso de dobraduras de papel. O custo é acessível, a aplicabilidade é eficaz e propicia uma ótima possibilidade de, além de obter a visualização dos resultados, usar o tato para realização dos trabalhos, o que mostra o quão divertido pode ser o aprendizado da matemática utilizando uma folha de papel e algumas manobras orientadas pelo professor.

Essa preocupação com a formação dos professores do ensino básico e o uso de recursos diferenciados para o ensino da matemática formam o bojo deste artigo: esta obra propicia uma ferramenta literária imprescindível para que o docente possa utilizar como material de estudos e, conseqüentemente, repassar em momento apropriado o conteúdo aprendido para seus alunos. O objetivo principal deste trabalho é criar um material de apoio baseado no estudo da Geometria Euclidiana utilizando dobraduras de papel para mostrar alguns conceitos e teoremas matemáticos acompanhados de suas respectivas demonstrações algébricas justificando os movimentos das dobras. O público-alvo será o professor do ensino básico, preferencialmente, dos 1º e 2º anos do nível médio, os quais já deram uma sólida apresentação dos conteúdos básicos matemáticos aos estudantes e são os docentes que trabalharão a Geometria de uma maneira mais axiomática e menos informal e intuitiva.

Os objetivos específicos são inicialmente criar uma obra completamente voltada para o estudo da geometria plana utilizando para seus aprendizados as dobras de papel, construir os principais conceitos e Teoremas da geometria plana por meio da manipulação do papel e fomentar a vontade de aprender geometria por meio de uma atividade lúdica realizada pelos professores.

Este artigo foi realizado sob a metodologia de levantamento bibliográfico e por meio de pesquisas exploratórias e descritivas, em que foi priorizada a aplicação dos temas desenvolvidos dirigida para a resolução de conceitos e Teoremas. A obra que deu início aos trabalhos foi a Dissertação de Liliana Cristina Nogueira Monteiro a qual foi apresentada para a obtenção do título de Mestre na Universidade de Lisboa no ano de 2008, porém outros trabalhos

acadêmicos, livros, artigos e literaturas eletrônicas foram utilizados para complementar a pesquisa.

## 2 Descrição Axiomática

As técnicas de dobragem mostradas neste trabalho são realizadas em linhas retas, apesar de serem conhecidas também modelos que trabalham com linhas curvas. Segundo Liliane (2008, p. 08) foi em meados da década de 70 que as dobragens em origami foram objeto de estudos em que eram enumeradas suas possíveis combinações. Neste cenário destacou-se Humiaki Huzita, um matemático japonês-italiano (nasceu no Japão, porém viveu a maior parte de sua vida na Itália) que ficou conhecido por formular, no final da década de 70, os primeiros seis axiomas, chamados inicialmente de operações básicas. Eram usados para definir uma única dobra que pudesse alinhar várias combinações de pontos e retas já pré-existentes, ou seja, descrevia a matemática de dobrar o papel com o intuito de resolver problemas de construção geométrica. Ramirez e Lopez (2013, p.03) afirmam que estes axiomas também são relacionados, não somente com os conceitos da geometria euclidiana, como também, com problemas de cálculo diferencial e geometria analítica.

Anos mais tarde, em 1989, Jacques Justin, ao publicar um artigo, sugeriu que as combinações possíveis com uma única dobragem eram sete e não mais seis como os estudos de Huzita revelavam. Ainda de acordo com as pesquisas de Liliane (2008, p. 08), em 2002 foi formalizado o sétimo axioma, ao apresentar uma dobragem que não era descrita nos estudos já realizados sobre o assunto e, então, os sete axiomas ficaram conhecidos como os Axiomas de Huzita-Hatori que mesmo em períodos diferentes trouxeram à tona a completude da lista. Alguns autores ainda ratificaram tais axiomas, como o físico americano Robert Lang que publicou em 2003 um estudo que demonstra a existência de apenas sete axiomas. Esses sete axiomas definem tudo que é possível de construir com uma única dobragem correlacionando retas e pontos.

Os Axiomas de Huzita-Hatori são:

Axioma 1: Dados dois Pontos,  $P_1$  e  $P_2$ , há uma única dobra que passa pelos dois pontos.

Axioma 2: Dados dois pontos,  $P_1$  e  $P_2$ , há uma única dobragem que os torna coincidentes.

Axioma 3: Dadas duas retas  $r_1$  e  $r_2$ , existe apenas uma dobra que faz coincidir  $r_1$  com  $r_2$ .

Axioma 4: Dados um ponto  $P$  e uma reta  $r$ , existe uma única dobra que é perpendicular a  $r$  que passa por  $P$ .

Axioma 5: Dados dois pontos distintos,  $P$  e  $P'$  e uma reta  $r$ , existe uma dobra que faz incidir  $P$  em  $r$  e que passa por  $P'$ .

Axioma 6: Dados dois pontos distintos,  $P$  e  $P'$  e duas retas distintas  $r$  e  $r'$ , existe uma dobra que faz incidir  $P$  sobre  $r$  e  $P'$  sobre  $r'$ .

Axioma 7: Dados um ponto  $P$  e duas retas  $r$  e  $s$ , existe uma dobra que faz coincidir  $P$  em  $r$  e é perpendicular a  $s$ .

### 3 Conceitos Geométricos Utilizando Dobras

Esta parte verificará e fixará conceitos elementares estudados na geometria plana com o uso de dobraduras.

#### 3.1 Construções Primitivas

##### Construção 3.1.1: Retas Concorrentes

Duas retas são concorrentes quando se interceptam em um único ponto. Com uma dobradura qualquer na folha, deve ser construída uma reta  $r$  e fixado um ponto  $P$  sobre  $r$ , tal que a partir dele seja realizada uma nova dobra fazendo concorrer à semirreta  $s$  formada por  $P$  e a reta  $r$ . Ao desdobrar a folha, é verificada a existência de duas retas concorrentes em  $P$ .

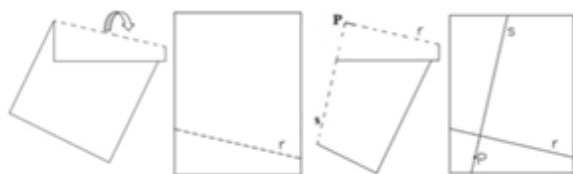


Figura 1: Construção de retas concorrentes.

##### Construção 3.1.2: Dados Dois Pontos Distintos, Existe uma Única Reta que Contém esses Pontos

Marcam-se dois pontos  $A$  e  $B$  distintos em um papel e logo em seguida é feita uma dobradura passando concomitantemente pelos pontos. Ao

desdobrar a folha, observa-se o resultado, ou seja, a dobradura construída exemplifica uma reta única que contém  $A$  e  $B$ .

##### Construção 3.1.3: Ponto Médio de um Segmento

Será denominado ponto médio de um segmento de reta ao ponto equidistante das extremidades. Após a construção de uma reta qualquer serão marcados dois pontos sobre a dobradura construída e logo após uma nova dobradura será feita, unindo o Ponto  $A$  com o  $B$ . Ao desdobrar deve-se marcar o ponto  $M$  de interseção das retas construídas pelas dobraduras. A partir do segundo passo  $AM$  e  $MB$  estão sobrepostos, ou seja, tais segmentos são iguais e  $M$  é o ponto médio de  $AB$ .

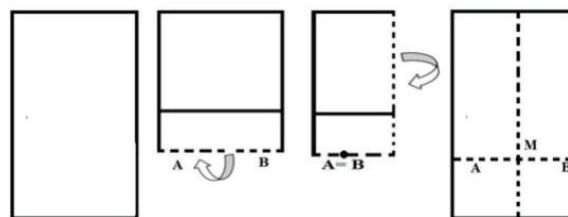


Figura 2: Construção do ponto médio.

##### Construção 3.1.4: Ângulos Opostos pelo Vértice são Congruentes

São construídas duas retas concorrentes  $r$  e  $s$  com interseção em  $O$  tal que  $A$  e  $A'$  estejam na reta  $r$ , e  $B$  e  $B'$  pertençam a  $s$ . Então os ângulos  $A\hat{O}B$  e  $A'\hat{O}B'$  são opostos pelo vértice e será mostrado que eles são iguais. A partir da concorrência das retas  $r$  e  $s$ , dobre a folha sobre  $r$  e sobreponha as semirretas  $OA'$  e  $OB$  e outra dobradura com  $AO$  e  $OB'$ . Ao desdobrar percebe-se que os ângulos  $A\hat{O}B$  e  $A'\hat{O}B'$  são congruentes, pois são sobrepostos conforme a figura 3.

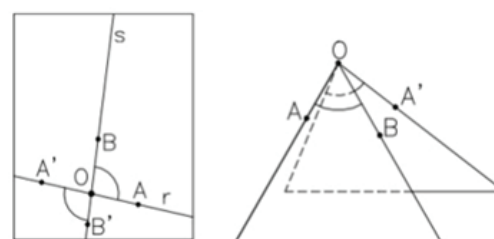


Figura 3: ângulos opostos pelo vértice.

### Construção 3.1.5: Construção de Retas Perpendiculares por um Ponto

Em um plano, dados um ponto  $P$  e uma reta  $r$  existe uma única reta  $s$  perpendicular a  $r$ . O caso será dividido em duas partes, sendo a primeira com o ponto  $P$  pertencendo à reta  $r$ : Será construída, através de uma dobradura, a reta  $r$  e marcado um ponto  $P$  sobre a reta. Logo após, será feita uma dobradura de tal modo que as semirretas formadas pelo ponto  $P$  coincidam e formem uma nova reta  $s$ . É observado, portanto, que os ângulos formados pelas retas  $r$  e  $s$  se sobrepõem, ou seja, são iguais e vale  $90^\circ$ , cada. Então os ângulos formados pelas retas  $r$  e  $s$  resultam em ângulos retos.

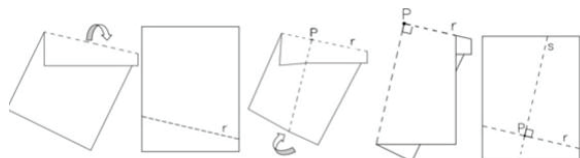


Figura 4: Dobras iniciais para a construção de retas perpendiculares.

A próxima parte será mostrada com o ponto  $P$  sendo externo à reta  $r$ . Deve ser feita uma dobradura pela reta  $r$  de tal maneira que o ponto  $P$  fique exposto e logo após deve-se construir uma dobradura passando por  $P$  e interceptando as duas semirretas formadas pela dobra na reta  $r$ . Ao desdobrar é verificada a construção de duas retas perpendiculares.

### 3.2 Construções de Figuras Geométricas

Para as construções com dobraduras que serão trabalhados alguns conceitos dos triângulos, será importante utilizarmos uma folha de papel na forma de um quadrado, que pode ser construído e provado com uma simples observação. Nota-se que os triângulos  $\Delta EBC$  e  $\Delta EFC$  pelo critério LAL (lado – ângulo - lado).

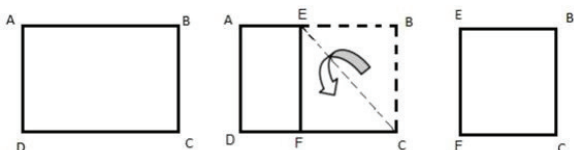


Figura 5: Construção do quadrado por meio de dobraduras.

### 3.2.1 Triângulo

Dados três pontos  $A, B$  e  $C$  não colineares, a reunião dos segmentos  $AB, AC$  e  $BC$ , chama-se triângulo. Sejam três pontos  $A, B$  e  $C$  não colineares, ao serem construídas dobraduras que passem por  $AB, AC$  e  $BC$ , verifica-se que o lugar geométrico formado pela união de tais dobras, chamadas de lados, é um triângulo  $ABC$ .

#### Construção 3.2.1.1: Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo

A soma dos ângulos internos de um triângulo é  $180^\circ$ . Esse resultado pode ser construído a partir de um triângulo qualquer formado com um papel. Será colocado de tal maneira que o vértice  $A$ , com o maior ângulo, fique em cima com o intuito de melhor visualizar o que será realizado. A partir daí, serão encontrados os pontos médios  $E$  e  $F$  respectivos dos lados  $AB$  e  $AC$ . É feita uma dobra no encontro de  $EF$  e o vértice  $A$  encontra o lado  $BC$  no ponto  $D$ . É relevante salientar que o segmento  $EF$  é paralelo ao lado  $BC$ , ou seja, base média do triângulo  $ABC$ . Logo após, os vértices  $B$  e  $C$  devem ir ao encontro do ponto  $D$  formando uma dobra perpendicular ao lado  $BC$ . Deve-se atentar para a congruência dos triângulos  $\Delta EDC$  e  $\Delta EBG$  pelo critério LLL (lado – lado – lado).

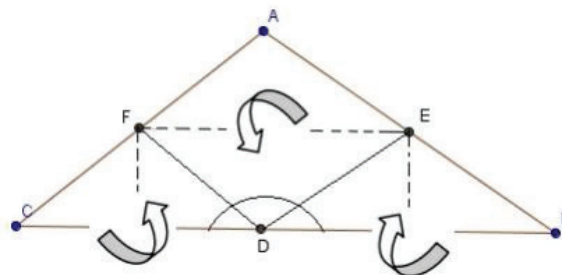


Figura 6: Construção da soma dos ângulos internos de um triângulo.

#### Construção 3.2.1.2: Triângulo Equilátero

Um triângulo é dito Equilátero quando os seus três lados são congruentes, ou seja,  $AC = BC = AB$ . Seja um quadrado  $ABCD$ , dobremos o lado  $AB$  sobre o lado  $DC$ , o vértice representado pelo ponto  $C$  será levado ao encontro da dobra feita e será fixado um ponto  $E$ . De maneira análoga será feito com o vértice representado pelo ponto  $B$ . O triângulo  $BEC$  formado pelas

três dobras é equilátero, uma vez que  $BE = BC$  e  $EC = BC$ .

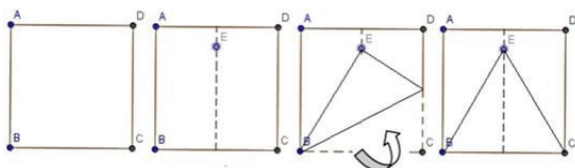


Figura 7: Construção do triângulo equilátero.

### Construção 3.2.1.3: Retas Bissetriz Interna

Uma bissetriz interna de um triângulo é o segmento com extremidades num vértice e no lado oposto que divide o ângulo desse vértice em dois ângulos congruentes. Considera-se, pois, duas retas  $r$  e  $s$  concorrentes e dois pontos  $A$  e  $B$  contidos respectivamente nessas retas. Com tal figura, será determinada a bissetriz do triângulo  $A\hat{O}B$ , daí, faz-se uma dobradura sobre a reta  $r$  e em seguida é realizada uma nova dobra com o intuito de sobrepor os segmentos  $AO$  e  $OB$ . Deve-se desdobrar o papel e dado um ponto  $Q$  marcado sobre a última dobradura realizada o que resulta os ângulos  $A\hat{O}Q$  e  $B\hat{O}Q$  serem congruentes, pois no segundo passo realizado, esses dois ângulos ficaram sobrepostos, logo a semirreta  $OQ$  divide o ângulo  $A\hat{O}B$  em dois ângulos congruentes e, portanto, é a bissetriz.

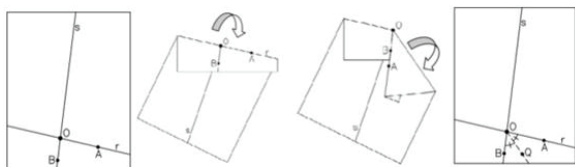


Figura 8: Construção da reta bissetriz interna.

### Construção 3.2.1.4: Mediatriz

Uma reta é dita mediatriz quando passa perpendicularmente pelo ponto médio de um segmento dado. Além disso, sejam os pontos  $A$  e  $B$  pertencentes ao segmento, então qualquer ponto pertencente à reta mediatriz que passa pelo ponto médio de  $AB$  será equidistante de  $A$  e  $B$ . Tome a reta  $r$  com os pontos  $A$  e  $B$  e seja  $M$  o ponto médio de  $AB$ . Ao realizar uma dobradura de tal maneira que  $A$  intercepte  $B$ , houve a formação da reta  $s$ . Por fim, é feita uma dobradura passando por  $AC$  e outra por  $BC$  tal que os triângulos  $AMC$  e  $BMC$  são congruentes pelo critério  $LLL$  (lado – lado – lado), logo a reta

$s$  é mediatriz do segmento  $AB$  e  $s$  é perpendicular à reta  $r$  interceptando-se em seu ponto médio.

## 3.2.2 Pontos Notáveis do Triângulo

### Construção 3.2.2.1: Incentro

As três bissetrizes internas de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto que está a igual distância dos lados do triângulo e este ponto é dito incentro. São realizadas as dobras necessárias para ser encontrada a bissetriz do ângulo  $A$  e sucessivamente as bissetrizes dos ângulos  $B$  e  $C$ . As três bissetrizes encontrar-se-ão em um mesmo ponto  $S$  denominado incentro.

### Construção 3.2.2.2: Circuncentro

O ponto de interseção das mediatrizes dos lados de um triângulo é denominado Circuncentro. O ponto  $P$  que representa o circuncentro do triângulo pode ser interno ou externo à figura.

Deve-se construir um triângulo qualquer  $ABC$  e logo após traçam-se as retas mediatrizes dos lados  $AB$ ,  $AC$  e  $BC$ . Ao desdobrar o papel, as respectivas dobras que representam as mediatrizes interceptam-se em um único ponto  $P$  que será marcado e denominado circuncentro.

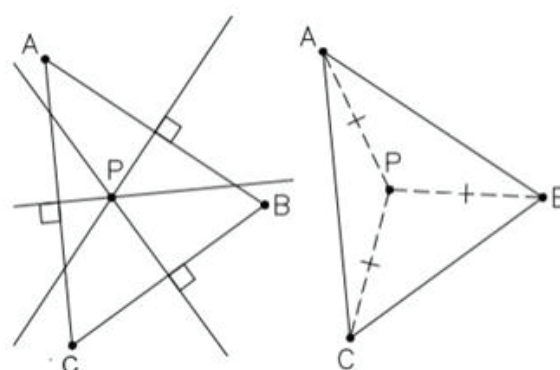


Figura 9: Construção do Circuncentro

### Construção 3.2.2.3: Ortocentro

Em um triângulo  $ABC$ , as retas suporte das alturas se intersectam em um único ponto denominado Ortocentro do triângulo. Inicialmente, com as definições dadas anteriormente, é construído um triângulo  $ABC$  e, em seguida, traçadas suas respectivas alturas referentes aos vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$ . O ponto  $H$  de

encontro das três alturas é o ortocentro do triângulo.

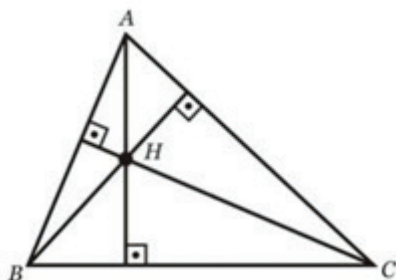


Figura 10: Construção do Ortocentro.

### 3.2.3 Quadrado

#### Construção 3.2.3.1: Quadrado Inscrito em outro Quadrado

Seja  $ABCD$  um quadrado. É realizada uma dobra na mediatriz dos lados  $AB$  e  $CD$ , formando o segmento  $EF$  e de maneira análoga forma-se o segmento na horizontal  $GH$ . Ao unirmos os pontos  $EFGH$  obtemos um quadrado inscrito em outro quadrado.

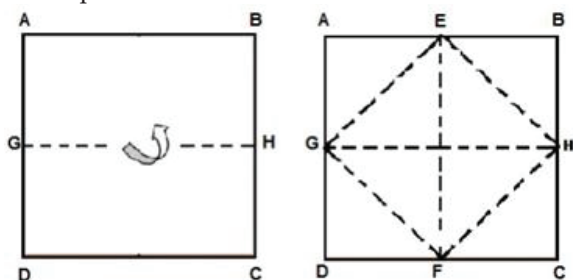


Figura 11: Quadrado inscrito no quadrado.

A figura formada com as dobraduras é um quadrado, pois os triângulos  $AGE$ ,  $BHE$ ,  $HCF$  e  $GDF$  são congruentes pelo critério  $LAL$  (lado - ângulo - lado), visto que os pontos  $E$ ,  $F$ ,  $G$  e  $H$  são pontos médios e dividem seus respectivos lados ao meio. O novo quadrado formado possuirá metade da área da figura inicial.

$$\text{Então: } GE = HE = HF = FG.$$

#### Construção 3.2.3.2: Divisão de um Segmento em $2^k$ Partes Iguais

Dividir um segmento em  $2^k$  partes iguais significa encontrar o ponto médio dele para cada valor de  $K$  natural.

A construção começará a partir de um quadrado de papel  $ABCD$ , e a primeira dobra será o segmento  $BC$  que irá ao encontro de  $AD$  obtendo o segmento  $MN$ , formado pelos pontos médios dos lados  $AB$  e  $CD$ , respectivamente. O

mesmo processo será repetido agora fazendo coincidir os segmentos  $AD$  e  $MN$  de tal maneira a obter o segmento  $PQ$  dos novos pontos médios e analogamente o  $BC$  sobre  $MN$ . A partir de então é possível dividir cada parte dos segmentos  $AB$  e  $CD$  ao meio obtendo 8 partes iguais; ou seja, para 1 dobra realizada obtemos  $K = 1$  e o segmento dividido em duas partes; para mais duas dobras realizadas,  $K = 3$  e obtemos 8 partes iguais e assim por diante, verificando todas as potências de 2 até  $2^k$ .

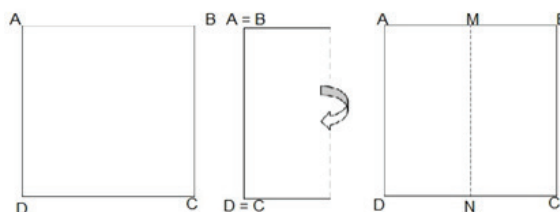


Figura 12: Divisão de um segmento em  $2^k$  partes iguais.

### 3.2.4 Pentágono Regular

Muitas são as maneiras de construir um pentágono regular por meio de dobras. Neste trabalho serão citados os passos seguidos por Lucas (2013, p. 27) para a realização de tal construção a partir de um retângulo  $ABCD$ .

Com o retângulo  $ABCD$ , a diagonal  $AC$  deve ser dobrada. Marca-se um ponto  $E$  de interseção entre os segmentos  $AB$  com  $DC$  e o segmento  $BC$  é dobrado para dentro da figura. O lado  $AD$  também é dobrado por dentro de  $AE$  encaixando as abas internamente. O triângulo  $AEC$  é isósceles, pois os triângulos  $DEA$  e  $BEC$  são congruentes segundo o critério  $LLL_0$  (lado - ângulo - ângulo oposto ao lado), então  $AE = EC$ .

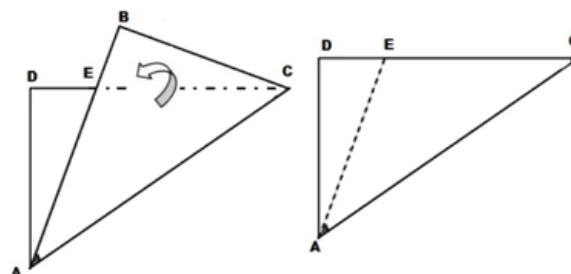


Figura 13: Construção inicial do pentágono regular.

O próximo passo é criar uma dobra que passe pela bissetriz do ângulo  $E\hat{A}C$ , obtendo o segmento  $AF$ , e ao ser desdobrado, deve-se realizar uma nova dobra,  $GH$ , levando o vértice  $A$  em direção ao ponto  $F$ .

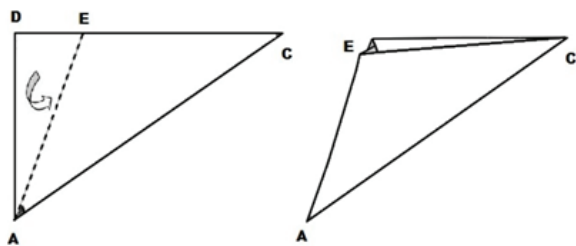


Figura 14: Dobras finais da construção do pentágono regular.

Por fim, deve ser feita a mesma dobra com o vértice  $C$  indo ao encontro do ponto  $G$ . Concluindo a construção de um pentágono regular.

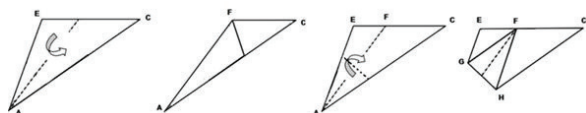


Figura 15: Construção final do pentágono regular.

O resultado é visto quando a figura é reaberta e é observado o vértice  $A$  do retângulo inicial. De acordo com a figura de Lucas (2013, p. 30), o ângulo  $\hat{A}$  ficou dividido em 5 partes iguais, ou seja, cada ângulo medindo  $18^\circ$ .

O triângulo  $GAH$  é isósceles, pois os triângulos  $GAM$  e  $HAM$  são congruentes pelo critério  $LAL$  (lado – ângulo – lado), já que  $AF$  e  $GH$  são perpendiculares visto que  $GH$  é mediatriz de  $AF$ . Por ser isósceles, conclui-se que ângulos  $EGH = IHG = 108^\circ$ .

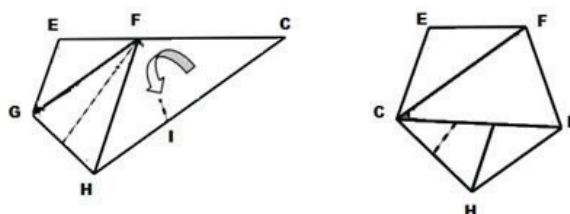


Figura 16: Pentágono regular construído com dobras.

### 3.2.5 Hexágono Regular

O hexágono regular será construído a partir do triângulo equilátero  $ABC$  já construído nas seções anteriores. O segmento  $CD$  é a altura, bissetriz e mediana, em relação ao lado  $AB$ , se o ponto  $D$  for ponto médio. Da mesma maneira ocorre com os segmentos que passam por  $AC$  e  $BC$ , daí resulta um ponto  $G$  que é definido como ortocentro, baricentro, incentro e circuncentro do

triângulo  $ABC$ . Ao realizarmos uma dobra levando o vértice  $B$  ao encontro do ponto  $G$ , o vértice  $A$  ao ponto  $G$  e também o  $C$  ao  $G$ , obtém-se um hexágono regular. A justificativa é simples para a construção de um hexágono regular, pois os triângulos formados são equiláteros. Sabe-se que a dobra  $ED$  é paralela à base  $AC$  do triângulo, assim como as outras dobras também são paralelas às outras bases, os triângulos  $EGD$  e  $FGH$  são congruentes pelo caso  $ALA$  (ângulo – lado – ângulo), e, portanto, o ângulo  $G$  é  $60^\circ$ , concluindo que os 6 triângulos construídos são equiláteros e portanto forma um hexágono regular.

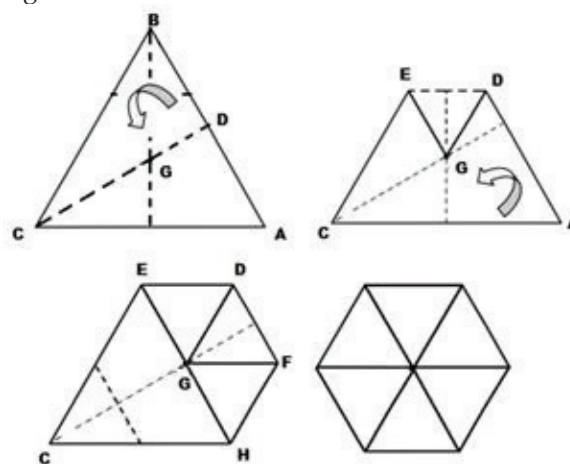


Figura 17: Construção do Hexágono regular.

## 4 O Uso de Dobraduras para a Resolução de Teoremas e Problemas

### 4.1 Teorema de Pitágoras

No triângulo retângulo o Teorema de Pitágoras fica definido como o quadrado da hipotenusa é a soma do quadrado dos catetos e para mais uma demonstração de tal teorema, agora através de dobraduras, iniciaremos com um quadrado de papel  $ABCD$ . A ideia para a demonstração é inicialmente formar através de dobras um quadrado com 9 quadrados menores, como se fosse 9 por 9 (nove linhas e nove colunas de mesmo tamanho). Para isso, deve-se começar dividindo o quadrado em três partes verticais iguais. Dobra-se o quadrado por uma diagonal, depois ao meio verticalmente e, por fim, o ponto médio superior deve ser levado ao encontro do vértice inferior direito. Ao desdobrarmos o papel é fixado um ponto  $P$  de interseção, no qual forma uma dobra perpendicular à base cujo comprimento ao lado



direito é igual a um terço do comprimento total do lado do quadrado.

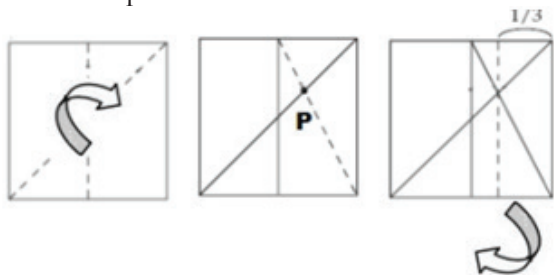


Figura 18: Demonstração do Teorema de Pitágoras por meio de dobras.

Em seguida, após essas etapas serem feitas, de tal modo a ser construído o quadrado com tal característica  $9 \times 9$ , serão realizadas mais quatro dobras nos segmentos  $GJ$ ,  $JF$ ,  $FK$  e  $KG$ , daí formou-se um novo quadrado  $GJFK$  inscrito sob o inicial. Analisando o triângulo  $DKG$ , sem perda de generalidade, temos:

A área do quadrado  $ABCD$  é  $(DG + DK)^2$ .

A área de cada um dos triângulos  $DGK$ ,  $GCJ$ ,  $JBF$  ou  $FAK$  é igual a  $\frac{DG \times DK}{2}$  e a área do quadrado  $GJFK$  é  $KG^2$ .

Em suma, temos que a área do quadrado  $ABCD = \text{área do quadrado } GJFK + 4(\text{área do triângulo } DGK)$ .

$$(DG + DK)^2 = KG^2 + 4\left(\frac{DG \times DK}{2}\right)^2$$

$$DG^2 + DK^2 = KG^2.$$

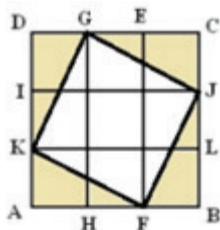


Figura 19: Teorema de Pitágoras.

### 4.2 Teorema de Haga

Conforme Monteiro (2008, p. 48), o teorema de Haga se caracteriza quando ao ser fixado um ponto  $P$  qualquer em um dos lados do quadrado, dobra-se o papel de forma que um dos vértices vá ao encontro desse ponto ficando sobreposto. Daí os triângulos formados por essa construção são semelhantes. A prova baseia-se nos ângulos obtidos em cada triângulo, que são  $90^\circ$ ,  $\alpha$  e  $\beta$ , logo os triângulos são semelhantes pelo caso AAA (ângulo – ângulo – ângulo).

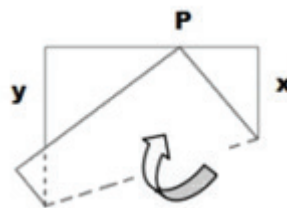


Figura 20: Demonstração do Teorema de Haga.

Vejamos uma forte aplicação nos exercícios em sala quando o ponto  $P$  é o ponto médio de um dos lados de um quadrado de lado a unidade. O objetivo será calcular “ $x$ ” e “ $y$ ”. Ora, por Pitágoras o “ $x$ ” é calculado com  $x^2 + (\frac{1}{2})^2 = (1 - x)^2$  e o “ $y$ ” basta usar o Teorema de Haga e a semelhança de triângulos. Caso o ponto  $P$  seja arbitrário o processo é idêntico ao mostrado anteriormente.

### 4.3 Trissecção do Lado de um Quadrado

Seja um quadrado  $ABCD$  de lado medindo a unidade, sem perda de generalidade. Inicialmente, devem-se encontrar os pontos médios de  $AD$  e  $BC$ , denominados  $E$  e  $F$ , respectivamente, e então se deve levar o vértice  $C$  ao encontro do ponto  $F$ . Teremos o ponto  $P$  e  $G$  em consequência da dobra e ao desdobrar observamos as seguintes conclusões: os triângulos  $PFC$  e  $FGB$  são semelhantes pelo Teorema de Haga, então:

$$\frac{BF}{GB} = \frac{CP}{CF}.$$

Logo, como  $BF = CF = \frac{1}{2}$ , obtemos  $GB \cdot CP = \frac{1}{4}$ .

Ao aplicar o Teorema de Pitágoras no triângulo  $PFC$ , tem-se que  $PF^2 = CP^2 + FC^2$  e  $PF = 1 - CP$ , resulta:  $CP = \frac{3}{8}$ , e, por conseguinte,  $GB = \frac{2}{3}$ . Conclui-se, portanto, que,  $AG = \frac{1}{3}$ .

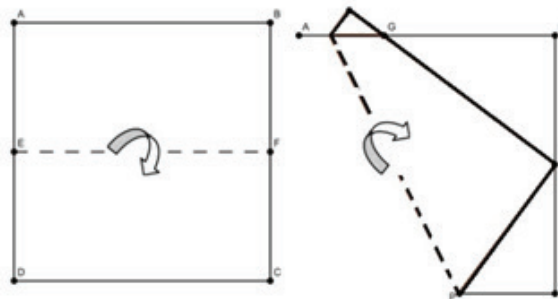


Figura 21: Dobras para a construção da trissecção do lado do quadrado.

### 4.4 Problema de Duplicação do Cubo

No 1º Colóquio de Matemática da Região Sul em 2010, um dos temas trabalhados foi o problema da duplicação do cubo, também conhecido por Problema Deliano de acordo com os estudos realizados por Monteiro (2008, p. 32), ou seja, construir um cubo cujo volume seja o dobro do volume de um cubo dado. Antes de ser iniciada tal construção, amparada pelos estudos dos anais do Colóquio e as observações realizadas por Peter Messer para a resolução deste problema clássico, as entrelinhas do problema devem ser analisadas, pois suponhamos sem perda de generalidade que o cubo inicial tenha aresta  $a$ , então seu volume seria  $a^3$ , daí o cubo que deverá ser construído possuirá o dobro do volume que quer dizer  $2a^3$ . Conclui-se que o novo cubo apresentará aresta igual a  $a\sqrt[3]{2}$ . Como  $a$  é dado, resta-nos apenas construir um segmento cuja medida seja  $a\sqrt[3]{2}$ . A partir do quadrado, com os lados já trissecionados, uniremos o vértice  $C$  ao lado  $BD$  de modo que o ponto  $F$  faça interseção com o segmento  $HG$ . Disso resulta,  $BJ = JD \sqrt[3]{2}$ .

A prova dessa afirmação começa com a utilização do Teorema de Pitágoras no triângulo  $CDP$ , ou seja,  $CP^2 = CD^2 + DP^2 \Rightarrow PJ^2 = CD^2 + DP^2$ .

Temos a semelhança entre os triângulos  $CDP$  e  $CFG$  pelo caso  $AAA$  (ângulo – ângulo – ângulo), portanto,  $\frac{DP}{DJ} = \frac{PJ}{FJ}$ .

Conclui-se das duas igualdades, após serem colocados os termos em função de  $JD$ , que  $(1 - JD)^3 = 2JD^3$ , ou seja,  $BJ = JD \sqrt[3]{2}$ .

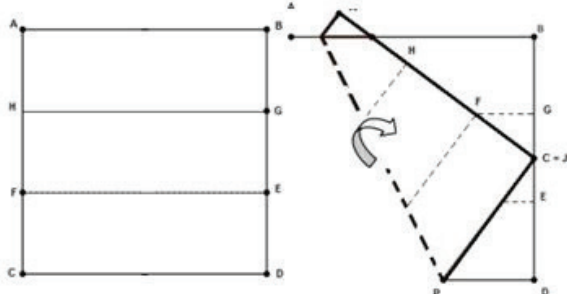


Figura 22: Construção da duplicação do cubo por meio de dobras.

### 4.5 Trissecção do Ângulo

O método que será apresentado foi uma citação feita por Monteiro (2008, p. 29) a Hisashi Abe que, em 1980, realiza a trissecção de um

ângulo agudo a partir de uma folha quadrada de papel. Seja  $\alpha$  o ângulo formado pelo lado  $AB$  e uma reta arbitrária (existem outras demonstrações utilizando semelhança de triângulos). Será realizada uma dobra nos pontos médios  $E$  e  $F$  dos lados  $AB$  e  $CD$ , respectivamente, e logo após uma nova dobra passando pelos pontos médios  $G$  e  $H$  de  $AE$  e  $BF$ , respectivamente. Uma dobra propiciada pelo axioma 6 será construída de tal maneira que o vértice  $A$  vá ao encontro do segmento  $GH$  e o ponto  $E$  intercepte o  $AK$ . O ponto  $L$  formado pelo término do segmento  $GH$  será prolongado até atingir o lado superior do quadrado.

Ao ser desfeita a última dobra, o prolongamento realizado forma um ângulo de  $\frac{2}{3}\alpha$  com o lado inferior do quadrado de papel. Daí, para haver a trissecção do ângulo  $\alpha$ , basta fazer incidir essa dobra com o lado inferior do quadrado para haver a divisão em três partes iguais.

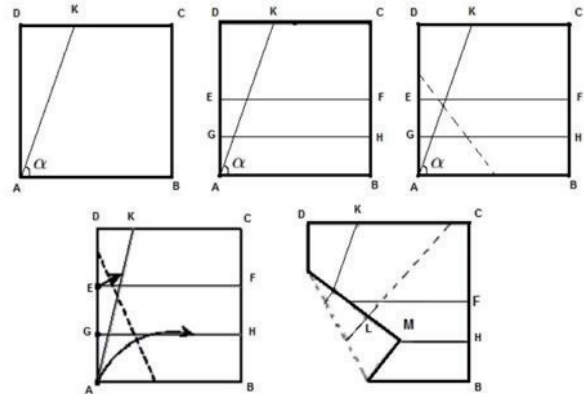


Figura 23: Dobras iniciais para a trissecção do ângulo.

Deve-se observar que os segmentos  $IM$  e  $IA$  são os mesmos, logo o ângulo formado em  $LIH$  possui mesma amplitude em  $GIA$ , portanto o prolongamento realizado anteriormente possui seu início exatamente no vértice  $A$ . O próximo passo será levar o prolongamento construído ao encontro do lado  $AB$ .

Pode-se extrair após a dobra algumas conclusões, tais como:

1.  $AI = AO$ , pois são hipotenusas de dois triângulos congruentes;
2.  $IJ = JO$ , pela reflexão do vértice  $A$  sob o segmento  $IO$  após a última dobra.

Por (1) e (2) conclui-se que o ponto  $J$  está na bissetriz do ângulo  $I\hat{A}O$ , logo  $I\hat{A}J = J\hat{A}O$ ,

então o ponto  $J$  pertence à última dobra realizada, daí  $J = M$ .

Os triângulos  $PAO'$  e  $JA O'$  são congruentes pelo caso  $LAL$  (lado – ângulo – lado) e, portanto, os ângulos  $P\hat{A}O' = J\hat{A}O'$  e por transitividade:  $P\hat{A}O' = J\hat{A}O' = J\hat{A}O = \alpha$ .

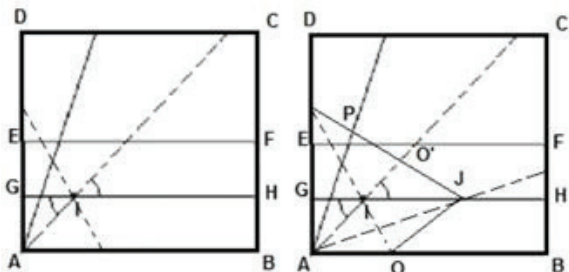


Figura 24: Trissecção do ângulo.

#### 4.6 Retângulo com a Diagonal Dividindo o Ângulo Reto em Ângulos de $54^\circ$ e $36^\circ$ .

A construção da figura com tais propriedades se dará com a utilização de um retângulo com dimensões da razão de 3 para 2, o qual será obtido a partir de um retângulo com dimensões  $a$  e  $b$  e sem perda de generalidade façamos  $a < b$ , tal que o lado menor será dividido pela metade e levado para o lado de maior medida fixando um dos vértices. Com tal medida, será possível realizar a trissecção do lado maior. Porém três situações podem ocorrer:

1.  $\frac{3a}{2} > b$ , e então se deve reduzir a dimensão de  $a$  da figura e repetir o procedimento.
2.  $\frac{3a}{2} = b$ , será obtido a figura desejada dividida em seis quadrados congruentes.
3.  $\frac{3a}{2} < b$ , bastará recortar o excesso de  $b$ .

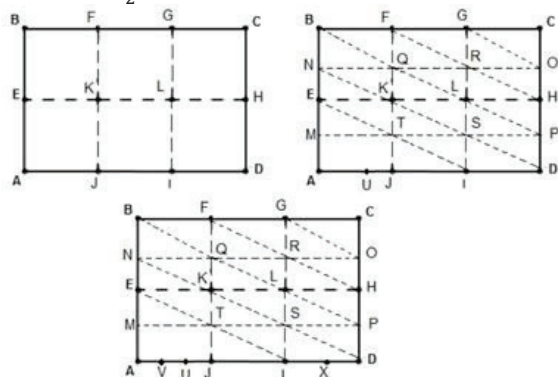


Figura 25: Retângulo com a diagonal dividindo o ângulo reto em ângulos de  $54^\circ$  e  $36^\circ$ .

Deverão ser realizadas duas dobras tais que os segmentos  $BC$  e  $AD$  coincidam com  $EH$ , formando após desdobrar o papel 12 retângulos congruentes com uma dimensão duas vezes maior do que a outra. Os retângulos formados devem ser dobrados em suas diagonais de forma contínua formando 24 triângulos retângulos congruentes com as medidas dos catetos iguais a 2 e 1. Utilizando o  $\Delta JIT$  e aplicando o Teorema de Pitágoras, obtemos:

$$IT^2 = JT^2 + JI^2$$

$$x^2 = 1^2 + 2^2$$

$$x = \sqrt{5}.$$

O próximo passo será dobrar a diagonal  $IT$  sob o lado  $AD$  do retângulo inicial, encontrando como interseção do ponto  $T$  sobre o lado inferior do ponto  $U$ . Observa-se que  $DU = 2 + \sqrt{5}$ .

Em seguida deve ser feita uma dobra levando o ponto  $P$  ao encontro do lado  $AD$  fixando o vértice  $D$  e formando um ponto  $X$ . E, logo depois, dobra-se o lado  $AD$  sobre ele mesmo sobrepondo o ponto  $X$  sobre o  $U$ , desta maneira a projeção do vértice  $D$  formará um novo ponto denominado  $V$ . Concluímos que  $DV = 3 + \sqrt{5}$ , pois  $DX = UV = 1$ .

Deve ser traçada uma perpendicular aos lados superior e inferior interceptando o ponto  $U$  e determinado um ponto  $W$  equidistante  $3 + \sqrt{5}$  unidades de comprimento do vértice  $D$ .

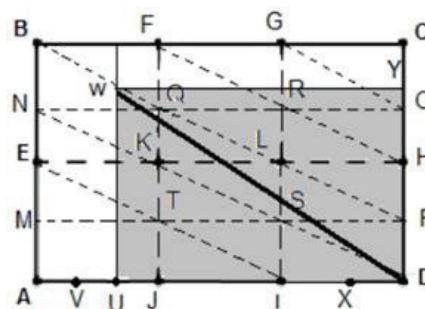


Figura 26: Construção do ângulo trissecionado.

O segmento  $UW$  deve ser levado ao encontro do lado  $CD$ , sendo o ponto  $Y$  a transposição de  $W$  sobre o lado  $CD$ , resultando com o retângulo  $YWUD$ , que divide o ângulo reto em  $54^\circ$  e  $36^\circ$ , pois:  $\cos 36^\circ = \frac{DU}{DW} = \frac{2+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$ .

### 4.7 Retângulos com Dimensões na Razão $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Continuemos trabalhando com um quadrado e sem perda de generalidade um que tenha lado medindo uma unidade. A primeira dobra a ser feita é para encontrar os pontos médios  $E$  e  $F$  dos lados  $AB$  e  $CD$ , respectivamente. Em seguida, o vértice  $C$  deve ser levado ao encontro do segmento  $EF$  fazendo intersectá-lo no ponto  $J$ . No ponto  $J$ , existirá uma dobra perpendicular ao lado  $AD$ , formando dois pontos  $H$  e  $I$ , pertencentes, respectivamente, aos lados  $AB$  e  $CD$ . Logo o retângulo  $HICB$  possui dimensões na razão  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ .

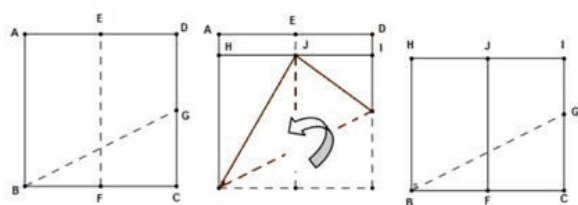


Figura 27: Retângulo com Dimensões na razão  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

### 4.8 Retângulo Áureo

Nesta seção, é construído um retângulo com as proporções áureas a partir de um quadrado de papel. A primeira dobra é a vertical que divide o quadrado ao meio seguida de outra na diagonal do retângulo formado. Após desdobrar a folha, deve-se levar o vértice inferior esquerdo ao encontro da última dobra realizada. Ao virarmos a folha dobrada ainda, devemos realizar uma dobradura na parte frontal de forma que o início do vinco à direita seja a interseção entre o lado direito do quadrado a última dobra realizada.

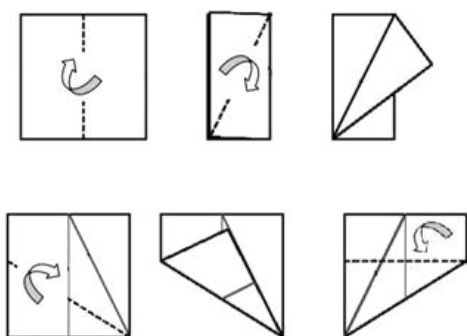


Figura 28: Dobras iniciais para a construção do retângulo áureo.

A afirmação é que após desdobrarmos a folha o retângulo formado tem as dimensões de um retângulo áureo. O objetivo da prova será encontrar o quociente entre os lados do retângulo resultante construído. Os triângulos  $FEC$  e  $GDC$  são semelhantes pelo critério AAA(ângulo – ângulo – ângulo) o que fornece a razão:  $\frac{EC}{DC} = \frac{FE}{GD} = \frac{FC}{GC}$  e, além disso, pelas propriedades de proporcionalidade:  $\frac{EC}{DC} = \frac{FE+FC}{GD+GC}$ .

Suponhamos, portanto, que o lado do quadrado inicial tenha lado  $l$ , então  $AD = EC = 1$  e  $FE = \frac{l}{2}$ , aplica-se o Teorema de Pitágoras no triângulo  $FEC$ :  $FC = \sqrt{FE^2 + EC^2} = \frac{l\sqrt{5}}{2}$ .

Verificamos que os ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  são iguais pela construção da dobra  $AC$  e os ângulos  $\beta$  e  $\gamma$  também são iguais, pois possuem as propriedades de serem alternos internos e por transitividade  $\alpha = \gamma$ . Logo, o triângulo  $AGC$  é isósceles, então  $GD + GC = GD + AG = 1$ . Ao calcularmos o quociente entre os lados do retângulo obtemos:

$$x = \frac{EC}{DC} = \frac{FE}{GD} = \frac{FC}{GC} = \frac{FE+FC}{GD+GC} = \frac{\frac{l}{2} + \frac{l\sqrt{5}}{2}}{1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

## 5 Conclusões

Uma constante dificuldade em aplicar algo novo na sala de aula encontra-se na rejeição de alguns professores em saírem de uma zona de conforto na qual já estão acostumados a vivenciar e partirem para novos rumos e formas de ensino. O ensino tradicional pautado em aulas expositivas em que somente o professor é o “detentor do saber” faz com que o discente seja o polo passivo do conhecimento, em que somente recebe o conteúdo e em nenhum momento participa de sua construção, ou seja, procurar um meio (lúdico e inovador) de reduzir a resistência de determinadas matérias que muitos alunos apresentam, em especial, em determinados conteúdos matemático é, de longe, uma máxima seguida por parte de uma parcela de professores.

Este trabalho foi desenvolvido com o intuito de contribuir para a formação do professor de matemática na apropriação e transmissão do conteúdo de Geometria Euclidiana Plana no ensino básico para seus alunos. Para que esse objetivo fosse alcançado, o meio encontrado foi a utilização de material concreto, uma vez que trabalhar com ferramentas táteis torna o

aprendizado lúdico e mais eficaz. Desta forma, foi elaborada uma proposta de ensino com instruções de fácil acesso ao docente e que possibilitasse sua prática, já que a matéria prima é comum no meio estudantil: folha de papel. Isto foi motivado pelo fato de acreditar-se que realizando trabalhos em sala de aula com materiais didáticos usando dobras de papel, levando o aluno a realizar não somente descobertas como também criar um embasamento teórico para os futuros temas sobre geometria.

Os aprendizados obtidos com o ensino da geometria por meio de dobras vão além dos resultados visíveis na escola, como também, o desenvolvimento de habilidades como memória, concentração, criatividade e, principalmente, interação com outras realidades dentro de sua própria sala. Tudo isso pode acontecer através do empenho do professor e de suas peculiaridades como educador, uma vez que somente ele pode determinar o momento certo e o como trabalhar com tais experimentos práticos, já que conhece o nível e grau de interesse da turma.

Esse artigo é uma contribuição literária que aborda história, problemas e Teoremas da Geometria para que os professores do ensino básico possam utilizar como apoio teórico com a finalidade de repassarem o conteúdo geométrico, transmitindo os problemas e Teoremas aqui abordados de uma forma lúdica que o aluno possa compreender. Como sugestão para futuros trabalhos, artigos ou projetos de doutorado na área de Educação Matemática, faz-se necessário provar a real eficiência da utilização de materiais manipuláveis com um adequado planejamento de aulas e a estruturação de um livro-texto, agora voltado para o discente, com uma linguagem bem simples e menos técnica para que possa haver o seu acompanhamento em sala e em casa.

Este trabalho também revela caminhos para o uso de tecnologias mais avançadas como a utilização do *software* Geogebra e também gravações de vídeo dos passos realizados com as manipulações das dobras, fazendo com que enriqueça o número e qualidade de recursos que podem ser disponibilizados para o aprendizado dos alunos.

Em suma, o trabalho desenvolvido possui elementos que podem contribuir para um real aprimoramento do professor em sala e contribuir na aprendizagem da geometria plana uma vez que deve ser bem aceito pela classe docente como um instrumento de pesquisas e trabalhos futuros. É deixado bem claro, que as dobras por si nada representariam se não houvesse um arcabouço teórico que complementasse toda a metodologia a ser implantada: prática e teoria.

## Referências

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998. 146 p.

BRITTO, Neyde Carneiro de Didática especial. São Paulo: Editora do Brasil, 1984.

CARVALHO, Lilian Milena Ramos. ROCHA, Jackeline Aparecida Aguiar Da. O Origami na Disciplina de Matemática como Recurso Didático para o Ensino de Geometria Plana e Espacial. Bahia. Anais do XIV Encontro Baiano de Educação Matemática. 2011

D'AMBROSIO, Ubiratan. Educação matemática: da teoria à prática. Campinas: Papirus, 1996.

DENECA, Maria de Lourdes, PIRES, Magna Natalia. **O ensino de matemática com auxílio de materiais manipuláveis**. Apucarana – PR, 2008. CEEBJA. Disponível em: <<http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/625-4.pdf>>. Acesso em 10 jun. 13.

LUCAS, E.S.C. Uma abordagem didática para a construção dos poliedros regulares e prismas utilizando origamis. 2013. 81 f. Dissertação (Pós-graduação Profissional em Matemática) - Centro de Tecnologia, Universidade Federal de Lavras, Minas Gerais, 2013.

MONTEIRO, Liliana Cristina Nogueira Origami: História de uma Geometria Axiomática. 2008. 111 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) Universidade de Lisboa. Faculdade de Ciências. 2008.

RAMIREZ, Z.M.S.; LÓPEZ, C.M.J. Producción de conocimiento geométrico através de la visualización de construcciones con doblado de papel.. In: I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe, 1, 2013, Santo Domingo, Anais. Santo Domingo: 2013. Disponível em: <http://www.centroedumatematica.com/memorias-icemacyc/216-400-1-DR-C.pdf>. Acesso em: 15 fev.2014.