Artigo Original *DOI:10.5902/2179460X14613*

Ciência e Natura, Santa Maria, v. 37 Ed. Especial PROFMAT, 2015, p. 525–531
Revista do Centro de Ciências Naturais e Exatas - UFSM
ISSN impressa: 0100-8307 ISSN on-line: 2179-460X

Uma Solução para o Problema de Flávio Josefo

A Solution to the Josephos' Problem

Márcia Erondina Souza da Silva[1] e Luciane Gobbi Tonet[2]

[1]Mestre em Matemática, Universidade Federal de Santa Maria, Brasil
marciaerondina@gmail.com
[2]Universidade Federal de Santa Maria, Brasil

Resumo

Neste trabalho, apresentamos uma sequência didática de atividades elaboradas para um grupo de alunos do ensino médio, na faixa etária de 15 a 18 anos, tendo como principal objetivo estudar um problema proposto pelo matemático Flávio Josefo, nos meados do ano 64. Inicialmente, revisamos alguns conteúdos como sequências numéricas, incluindo os casos especiais das Progressões Aritmética e Geométrica. Em seguida, introduzimos algumas noções a respeito de Relações de Recorrência e do Princípio da Indução Matemática, permitindo generalizar alguns conceitos e resultados já conhecidos intuitivamente pelo grupo de alunos. Este artigo é parte integrante da dissertação de mestrado intitulada Uma Proposta de Abordagem ao Problema de Flávio Josefo Aplicada ao Ensino Médio elaborada pela aluna Márcia Erondina D. de S. da Silva sob orientação da Prof.ª Dr.ª Luciane Gobbi Tonet.

Palavras-chave: *Problema de Flávio Josefo, Relações de Recorrência, Princípio da Indução Matemática.*

Abstract

In this paper, we present a didactic sequence of activities designed for a group of high school students, aged 15-18 years. Our main objective is to study a problem proposed by the mathematician Josephus, around the year 64. Initially, we review some content like numerical sequences, including the special cases of the Arithmetic and Geometric Progressions. Then, we introduce some notions about Recurrence Relations and the Principle of Mathematical Induction, allowing the generalization of some concepts and results which are already known intuitively by the group of students. This article is part of the dissertation entitled A Proposed Approach to Josephus Problem Applied to High School prepared by the student Erondina Marcia D. S. da Silva under the guidance of the Professor Dr. Gobbi Luciane Tonet.

Keywords: *Josephus Problem, Recurrence Relations, Principle of Mathematical Induction.*

submissão: 2014-06-29 Aceito: 2014-12-17

1 Introdução

Flávio Josefo[1] nasceu em Jerusalém, por volta do ano 37 d.C., e viveu até 100 d.C.. Desde muito cedo se envolveu em questões de ordem religiosa, política e militar, com ideais mais próximos do entendimento com Roma.

Neste âmbito, ressaltamos a participação de Flávio Josefo em uma grande revolução defendendo militarmente a Judeia. Seu notável desempenho lhe rendeu a nomeação de chefe militar da região da Galileia. Em decorrência a uma destas batalhas vividas por Josefo e seu grupo, surgiu um famoso episódio de sua biografia o qual, por não constar em nenhuma literatura confiável, é considerado por muitos como lenda.

Este episódio relata o momento em que Flávio Josefo foi encurralado pelos romanos em uma caverna, juntamente com 11 rebeldes judeus. O grupo de rebeldes, preferindo o suicídio à captura, decidiu formar um círculo e, contando ao longo deste, matar cada terceira pessoa restante até não sobrar ninguém. Contudo Josefo, aliado a um amigo, não querendo participar do pacto suicida, calculou rapidamente onde ele o amigo deveriam ficar nesse círculo de tal modo que a sobrevivência de ambos fosse garantida. (ver [**?**])

A sobrevivência de Josefo dentre os companheiros originou um curioso problema muito difundido, principalmente entre os matemáticos e que, mais geralmente, pode ser enunciado da seguinte maneira:

Decide-se eliminar pessoas de um grupo da seguinte forma:

i) as pessoas são colocadas em um círculo com lugares marcados em ordem crescente no sentido horário, (1, 2, 3, ..., n),

ii) este círculo é percorrido no sentido horário tantas vezes quanto necessário, começando com a pessoa no lugar 1, e toda segunda pessoa viva nesta visitação é eliminada até que só uma sobreviva.

Qual a posição que a sobrevivente ocupa? (Santos, 2007, p.234)

Para entendermos melhor este problema, consideramos o caso em que cada segunda pessoa, a partir do ponto inicial da contagem, deverá sair do círculo, sempre em sentido horário. Claramente, se tivermos apenas um soldado encurralado, este será o único sobrevivente.

Suponhamos que, no círculo, temos $n = 2$ soldados, denominados S_1 e S_2. Começando a contagem por S_1, em sentido horário, eliminaremos o soldado S_2, de modo que o sobrevivente será o próprio soldado S_1. Caso tenhamos $n = 3$ soldados no círculo, iniciando a contagem em S_1, eliminaremos o soldado S_2. Recomeçando a contagem em S_3, eliminamos o soldado S_1. Neste caso, sobreviverá o soldado S_3.

Para $n = 4$ soldados, ao percorrer o círculo pela primeira vez, eliminamos os soldados S_2 e S_4. Na segunda rodada, reiniciamos a contagem no soldado S_1, com a consequente eliminação do soldado S_3. Para este caso, temos que S_1 será o soldado sobrevivente.

Repetimos este procedimento para os casos em que o círculo contém até $n = 12$ soldados, conforme podemos observar na Tabela 1. Denotaremos por $S(n)$ a posição do soldado sobrevivente.

Através destes exemplos, já é possível observar que, dentro das nossas condições iniciais, na primeira rodada serão eliminados os soldados nas posições pares, denotados por S_{2k}, o que nos leva a concluir que a posição do soldado sobrevivente será ímpar. Além disso, se o número n de soldados no círculo é par, então a segunda rodada inicia no soldado S_1, sendo que essa rodada conterá exatamente a metade dos soldados da formação inicial. Caso contrário, se $n = 2k + 1$ for um número ímpar, observamos que a segunda rodada inicia no soldado S_n e, neste caso, ela terá $k + 1$ soldados.

Além disso, também percebemos que, para a segunda rodada, recaímos no problema inicial, apenas com um número reduzido de soldados. Daí a ideia de recorrência a qual este problema está associado.

Vamos dividir o estudo deste problema em dois casos: primeiramente, para $n = 2k$ um número par de soldados e, em seguida, para $n = 2k + 1$. A partir dos dados obtido na Tabela 1, observamos que

$$\begin{aligned} S(2) &= S(2\times 1) = 2S(1) - 1 \\ S(4) &= S(2\times 2) = 2S(2) - 1 \\ S(6) &= S(2\times 3) = 2S(3) - 1 \\ S(8) &= S(2\times 4) = 2S(4) - 1 \\ S(10) &= S(2\times 5) = 2S(5) - 1 \\ S(12) &= S(2\times 6) = 2S(6) - 1 \end{aligned}$$

Ou seja, se $n = 2k$, então $S(2k) = 2S(k) - 1$, com $k \in \mathbb{N}$. De maneira inteiramente análoga, concluímos que se $n = 2k + 1$, então $S(2k + 1) = 2S(k) + 1$, com $k \in \mathbb{N}$ e, desta forma, caracterizamos a relação de recorrência associada ao problema de Josefo. Com isso, a resolução do problema de Josefo se reduz, equivalentemente, a resolução da relação de recorrência definida por:

$$\begin{aligned} S(1) &= 1 \\ S(2k) &= 2S(k) - 1 \\ S(2k+1) &= 2S(k) + 1 \end{aligned}$$

Como forma de compreender melhor o comportamento desta relação de recorrência, solicitamos a ampliação da Tabela 1 para até $n = 22$ soldados, conforme ilustramos na Tabela 2.

[1] Em latim, ele era conhecido como Flavius Josephus. Após ser reconhecido como cidadão romano, passou a ser chamado de Tito Flávio Josefo. Originalmente, seu nome judaico era Yosef ben Matityahu, que significa José, filho de Matias.

Tabela 1: Soluções do Problema para valores pequenos

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$S(n)$	1	1	3	1	3	5	7	1	3	5	7	9

Tabela 2: Soluções do Problema de Flávio Josefo

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
$S(n)$	1	1	3	1	3	5	7	1	3	5	7	9	11	13	15	1	3	5	7	9	11	13

A partir de uma análise detalhada desta tabela, podemos perceber algumas propriedades da sequência $S(n)$. Por exemplo, observamos que $S(2) = S(4) = S(8) = S(16) = 1$, o que nos permitiu conjecturar que $S(n) = 1$, para $n = 2^p$ e $p \in \mathbb{N}$. Além disso, também observamos que $S(3) = S(5) = S(9) = 3$, $S(6) = S(10) = 5$, $S(7) = S(11) = 7$. Desta forma, verificamos a existência da sequência $(1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, ...)$ que se inicia a cada potência de 2. O comportamento previsível desta sequência permite, inclusive, a obtenção de outros valores para $S(n)$ sem muita dificuldade.

2 Prática Pedagógica

Desenvolvemos nossa proposta didática ao longo de nove encontros, nos quais criamos/estabelecemos as relações necessárias para solucionar o problema de Flávio Josefo. Como consequência, proporcionamos aos alunos uma visão mais ampla de alguns conceitos de matemática básica através de tópicos como Relações de Recorrências e o Princípio de Indução Matemática.

Inicialmente, apresentamos o problema de Flávio Josefo e realizamos atividades práticas com o intuito de compreendê-lo melhor. Basicamente, dispomos os alunos em um círculo e analisamos, em grupo, a posição do soldado sobrevivente para diferentes números de soldados no círculo. Variamos também o número do soldado a ser eliminado em cada contagem. Este tipo de atividade lúdica permitiu aos alunos a elaboração de algumas conjecturas úteis para a resolução do problema, conforme descrevemos na seção anterior.

Do segundo ao oitavo encontro estudamos os conteúdos matemáticos necessários para a resolução do problema de Flávio Josefo, dentre os quais citamos Sequências, Progressão Aritmética e Geométrica, as quais denominaremos PA e PG, respectivamente, Relações de Recorrência e o Princípio de Indução Matemática.

Abordamos o estudo das PA a partir do mesmo raciocínio desenvolvido por Carl Friedrich Gauss [6], no ano de 1787, no auge de seus 7 anos de idade. Na oportunidade, Gauss frequentava o terceiro ano do ensino fundamental quando, na aula de Aritmética, o professor pediu aos alunos que calculassem o valor da soma dos algarismos de 1 a 100. Gauss, muito prontamente, escreveu o número 5050, impressionando a todos pela rapidez e inteligência.

Neste momento, explicamos aos alunos o raciocínio de Gauss. Ele observou que

$$1 + 2 + 3 + ... + 98 + 99 + 100$$
$$100 + 99 + 98 + ... + 3 + 2 + 1$$

representam a mesma soma S e, por isso, $2S = 101 + 101 + 101 + \ldots + 101 + 101 + 101$ é uma soma com 100 parcelas iguais a 101, donde segue o resultado.

Com base no raciocínio desenvolvido por Gauss, pedimos que os alunos determinassem a soma dos termos $a_1, a_2, \ldots, a_7$ de uma PA. Neste caso, obtivemos que

$$S = \frac{(a_1 + a_7)7}{2}$$

o que permitiu com que os alunos conjecturassem que a soma dos n termos de uma PA satisfaz

$$S = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

Em seguida, abordamos a PG, com o objetivo de determinar uma fórmula para o termo geral e para a soma de seus termos. Deduzimos ambas as fórmulas que, em geral, os alunos assumem como verdadeiras, dando um enfoque mais formal para a abordagem do assunto. A partir deste momento, alguns alunos passaram a questionar a validade de certas propriedades matemáticas, haja visto que elas apenas lhes foram transmitidas, sem jamais terem sido justificadas ou demonstradas.

Em nosso próximo tópico de estudo abordamos Relações de Recorrência. Num primeiro momento, procuramos compreender o que é uma relação de recorrência com o auxílio de uma vídeo aula do professor Morgado (ver [?]). Nesta vídeo aula, os alunos estudaram alguns exercícios resolvidos sobre relações de recorrência. Desenvolvemos nossa prática pedagógica de tal forma que os alunos pudessem compreender que alguns exemplos de Relações de Recorrência já eram conhecidos, como as PA e PG. Ou seja, estávamos apenas generalizando alguns conceitos previamente estudados em classe.

Encerramos nossa prática pedagógica com o estudo do Princípio de Indução Matemática. Conforme (Hefez,

n	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
$S(n)$	15	17	19	21	23	25	27	29	31	1

[**?**]), esse assunto "*é um tanto sutil e delicado*". Portanto, torna-se necessário utilizar uma linguagem simples e até figurativa, através de variados exemplos que possam auxiliar na compreensão deste importante princípio matemático.

Desta forma, iniciamos apresentando dois exemplos lúdicos. No primeiro deles, perguntamos aos alunos o que acontece ao empurrarmos a primeira peça da fila de dominós perfeitamente alinhados. Todos concordaram que o comportamento do conjunto de peças é totalmente previsível, mesmo que tenhamos muitas peças enfileiradas. Ou seja, se um conjunto de peças for derrubado, a próxima peça na fila também cairá.

O segundo exemplo proposto é conhecido por indução galinácea e criado pelo filósofo Bertrand Russel (Hefez, [**?**]):

"*Havia uma galinha nova no quintal de uma velha senhora. Diariamente, ao entardecer, a boa senhora levava milho às galinhas. No primeiro dia, a galinha, desconfiada, esperou que a senhora se retirasse para se alimentar. No segundo dia, a galinha, prudentemente, foi se alimentando enquanto a senhora se retirava. No nonagésimo dia, a galinha, cheia de intimidade, já não fazia caso da velha senhora. No centésimo dia, ao se aproximar a senhora, a galinha, por indução foi ao encontro dela para reclamar o seu milho. Qual não foi a sua surpresa quando a senhora pegou-a pelo pescoço com a intenção de pô-la na panela.*"

A partir destes dois exemplos lúdicos, os alunos puderam ter uma breve noção do que começaríamos a estudar. Isto é, uma vez validada uma propriedade para um número finito de casos, podemos provar que a mesma valerá para qualquer outro caso. Sendo assim, introduzimos o Princípio da Indução Matemática.

Princípio da Indução Matemática: Seja $a \in \mathbb{N}$. Para cada número natural $n \geq a$, consideremos uma afirmação $P(n)$ de forma que

i) $P(a)$ é verdadeira.

ii) Se para um natural $k \geq a$, $P(k)$ é verdadeira, então $P(k+1)$ é verdadeira.

Então a afirmação $P(n)$ é verdadeira para todo natural $n \geq a$.

Dentro deste contexto, os alunos concordaram que as fórmulas das somas dos termos em PA e PG previamente estudadas, foram validadas para casos especiais e que, a partir destes casos, poderíamos concluir que as mesmas são válidas para quaisquer sequências dentro das condições solicitadas. Todos concordaram em utilizarmos o Princípio de Indução Matemática para provar a validade destas fórmulas de uma maneira mais geral.

Exemplo inicial: Determinar a soma dos n primeiros números naturais.

Para resolver este exemplo, inicialmente relembramos que

$$S = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

representa a soma dos n termos de uma PA. Para a soma dos primeiros números naturais, teremos

$$S = \frac{(1+n)n}{2} \tag{1}$$

Verificamos que esta igualdade é verdadeira para $n = 1$. Em seguida, por hipótese de indução, assumimos que **??** é verdadeira para algum número natural n. Em seguida, observamos que a soma dos primeiros números naturais satisfaz

$$\begin{aligned} S &= \frac{(1+n)n}{2} + (n+1) \\ &= (n+1)[\frac{n}{2} + 1] \\ &= \frac{(n+2)(n+1)}{2} \end{aligned}$$

Observamos que esta última igualdade obtida segue de **??**, ao substituirmos n por $n+1$. Ou seja, provamos que **??** também é verdadeira para $n+1$. Portanto, pelo Princípio de Indução Matemática, provamos que a soma dos n primeiros números naturais satisfaz $S = \frac{(1+n)n}{2}$, para todo número natural.

No que segue, propomos mais dois desafios:

Desafio 1: É possível determinar a soma dos n primeiros números ímpares?

Desafio 2: Qual é o número máximo de regiões definidas por n retas no plano?

Auxiliamos os alunos na compreensão de cada um dos desafios através da análise de exemplos mais simples, com $n = 1, 2, 3, 4$. Utilizando o princípio de Indução Matemática, generalizamos a solução para qualquer número natural n. No que segue, descrevemos o raciocínio desenvolvido para resolução do Desafio 1. Quanto ao Desafio 2, presseguimos de forma similar.

Seja $P(n)$ a soma dos n primeiros números ímpares. Em particular, temos que

$$\begin{aligned} P(1) &= 1 \\ P(2) &= 1+3=4 \\ P(3) &= 1+3+5=9 \\ P(4) &= 1+3+5+7=16 \\ P(5) &= 1+3+5+7+9=25 \end{aligned}$$

Desta listagem, os próprios alunos conjecturaram que a soma dos n primeiros números ímpares satisfaz

$$P(n) = 1+3+5+...+(2n-1) = n^2.$$

Vamos validar essa conjectura utilizando o Princípio de Indução Matemática. Já verificamos que $P(1) = 1^2 = 1$. Por hipótese de indução, suponhamos que $P(n) = n^2$, para algum número natural n. Vamos verificar se esta igualdade é verdadeira para $n+1$, ou seja, mostraremos que $P(n+1) = (n+1)^2$. Por hipótese de indução,

$$P(n) = 1+3+5+...+(2n-1) = n^2.$$

Logo,

$$\begin{aligned} P(n+1) &= P(n)+(2n+1) \\ &= n^2+2n+1 \\ &= (n+1)^2 \end{aligned}$$

e, portanto, pelo Princípio de Indução Matemática, provamos que a soma dos n primeiros números ímpares satisfaz $P(n) = n^2$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

3 Relação de Recorrência e o Princípio de Indução Matemática

As identidades estabelecidas na Seção 1 foram obtidas mediante a observação de um número pequeno casos. Ou seja, a partir de um número finito de observações, conjecturamos acerca das propriedades envolvidas na sequência proveniente da relação de recorrência. Mas, se uma dada propriedade vale para um número finito de casos, como podemos nos valer disso para concluir sua validade de um modo mais geral?

A resposta a esta pergunta reside num importante resultado da Matemática, denominado *Princípio da Indução Matemática*. Este resultado nos permitirá verificar a validade da relação de recorrência encontrada para todo número natural p.

Com base neste princípio, partimos para a verificação de que nossa fórmula está, de fato, correta. Iniciaremos mostrando que $S(2^p) = 1$, para todo $p \in \mathbb{N}$.

Observamos que esta igualdade é verdadeira para $p = 0$. Com efeito, se $p = 0$ então $2^p = 1$ e, neste caso, o único soldado encurralado é o próprio sobrevivente. Ou seja, $S(1) = 1$.

Por hipótese de indução, suponhamos que $S(2^p) = 1$, para algum $p \in \mathbb{N}$. Pela própria definição da relação de recorrência, para 2^{p+1} soldados, temos que

$$S(2^{p+1}) = S(2.2^p) = 2S(2^p) - 1.$$

Por hipótese de indução, $S(2^p) = 1$ e, com isso, $S(2^{p+1}) = 1$. Portanto, segue do Princípio de Indução Matemática que, para todo $n = 2^p$, o soldado sobrevivente é $S(n) = 1$.

Nosso próximo passo consiste em analisar o comportamento de $S(n)$ para $n \neq 2^p$. Observando os dados destacados na Tabela 2, concluímos que

$$\begin{aligned} S(n) &= 3, \forall n = 2^p+1 \\ S(n) &= 5, \forall n = 2^p+2 \\ S(n) &= 7, \forall n = 2^p+3 \end{aligned}$$

Com isso, passamos a analisar o comportamento da relação de recorrência obtida para $S(n)$, com $n = 2^p + r$ e $r \in \mathbb{N}$ tal que $0 < r < 2^p$, de onde temos que a paridade de n está associada a paridade de r. No que segue, analisaremos os casos em que r é par e ímpar.

Se r é par então, da definição da relação de recorrência,

$$S(n) = S(2^p+r) = 2S(2^{p-1} + \frac{r}{2}) - 1 \qquad (2)$$

e, analogamente, se r é ímpar

$$S(n) = S(2^p+r) = 2S(2^{p-1} + \frac{r-1}{2}) + 1 \qquad (3)$$

Desta forma, se $p = r = 1$, então $n = 3$ e, com isto, segue da igualdade **??** que

$$S(n) = 2S(1) + 1 = 3 = 2r+1.$$

Por outro lado, se $p = r = 2$, então $n = 2^2 + 2 = 6$ e, com isso, segue da igualdade **??** que

$$S(n) = 2S(3) - 1 = 5 = 2r+1.$$

Com a análise de mais alguns casos, concluimos que

$$S(n) = S(2^p + r) = 2r+1$$

é uma possível solução para o problema de Josefo. Novamente, utilizamos o Princípio de Indução Matemática sobre $n \in \mathbb{N}$ para verificar a validade desta solução encontrada para quaisquer $p,r \in \mathbb{N}$.

Inicialmente, observamos que se $p = r = 0$, então $S(1) = 2 \times 0 + 1 = 1$, donde segue que para um grupo com apenas um soldado, ele próprio sobreviverá, vindo de acordo com que havíamos estudado inicialmente.

Por hipótese de indução, suponhamos que existe um número natural n tal que $S(n) = S(2^p + r) = 2r + 1$, para quaisquer $p,r \in \mathbb{N}$. Vamos verificar a veracidade desta solução para $n + 1$, ou seja, mostraremos que

$$S(n+1) = S(2^p + r + 1) = 2(r+1) + 1.$$

Para isto, vamos considerar dois casos.

1. Se $n + 1 = 2^p + r + 1$ é par, então da igualdade **??**, segue que

$$\begin{aligned} S(n+1) &= S(2^p + r + 1) \\ &= 2S(2^{p-1} + \frac{r+1}{2}) - 1. \end{aligned}$$

   Por hipótese de indução, temos que

$$\begin{aligned} S(2^{p-1} + \frac{r+1}{2}) - 1 &= 2\frac{r+1}{2} + 1 \\ &= (r+1) + 1 \end{aligned}$$

   e, consequentemente

$$\begin{aligned} S(2^p + r + 1) &= 2S(2^{p-1} + \frac{r+1}{2}) - 1 \\ &= 2((r+1) + 1) - 1 \\ &= 2(r+1) + 1. \end{aligned}$$

2. Se $n + 1$ é ímpar, da igualdade **??**, temos que

$$\begin{aligned} S(n+1) &= S(2^p + r + 1) \\ &= 2S(2^{p-1} + \frac{(r+1)-1}{2}) + 1 \end{aligned}$$

   Por hipótese de indução, temos que

$$\begin{aligned} S(2^{p-1} + \frac{(r-1)+1}{2}) &= 2\frac{(r+1)-1}{2} + 1 \\ &= r + 1 \end{aligned}$$

   e, consequentemente

$$\begin{aligned} S(2^p + r + 1) &= 2S(2^{p-1} + \frac{(r+1)-1}{2}) + 1 \\ &= 2(r+1) + 1. \end{aligned}$$

Ou seja, a fórmula vale para $n + 1$ e, portanto, pelo Princípio de Indução Matemática, $S(n) = 2r + 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

4 Considerações finais

Em cada um destes tópicos abordados, procuramos fazer com que os alunos compreendessem a ideia de infinito e que, intuitivamente, capturassem a essência do Princípio da Indução Matemática. Compreender o processo de Indução Matemática no Ensino Médio se torna necessário na medida em que introduz na vida do aluno problemas acerca do infinito. Conforme [**?**], "é com o conceito de indução que se estabelece o primeiro contato com a noção de infinito em Matemática, e por isso ele é muito importante; porém, é ao mesmo tempo, sutil e delicado."

A recursividade também nos permite trabalhar com este tipo de problema, muito embora seja outro tema pouco comum nos currículos de matemática do Ensino Médio. Segundo [**?**], "É necessário valorizar os raciocínios recursivos pois hoje, com a revolução da tecnologia, é extremamente importante saber raciocinar recursivamente. Mas este é um assunto que exige dos alunos um raciocínio mais elaborado, sendo um tanto abstrato."

Em função das dificuldades resultantes da abordagem destes conteúdos um tanto abstratos, fez-se importante a elaboração de uma prática pedagógica adequada, capaz de tornar o aluno apto a compreender todos os conceitos e propriedades envolvidas no processo. Conteúdos de ordem mais abstrata, como relações de recorrência e indução matemática, também podem ser abordados no Ensino Médio, desde que se tenha em mãos um problema motivador, com um enfoque que auxilie a compreensão dos conceitos abordados. No entanto, isso exigirá do educador e um planejamento da aula que seja coeso, proporcionando condições de guiar os alunos por este mundo de conhecimentos matemáticos.

Referências

[1] RIBEIRO JR., W.A. Flávio Josefo. **Portal Grécia Antiga**: São Carlos, Disponível em: `www.greciantiga.org/arquivo.asp?num=0581`. Último acesso em: 27/06/2014.

[2] FOMIN, Dmitri; GENKIN, Sergey; ITENBERG, Ilia. **Círculos Matemáticos - A Experiência Russa**: Rio de Janeiro, Impa, 2010.

[3] HEFEZ, Abramo. **Indução Matemática**, RJ, OBMEP, 2009.

[4] GIRALDO, Victor et al. **Livro Companheiro do Professor de Matemática: Números Reais.**: Rio de Janeiro, No prelo, 2013.

[5] JESUS, Eliane Alves de; SILVA, Elisa Fonseca Sena. **Relações de Recorrência**: Belo Horizonte, 2006.

[6] LIMA, Elon Lages et al. **A Matemática no Ensino Médio**: Rio de Janeiro, SBM, 2006.

[7] OLIVEIRA, Krerley Irraciel Martins; FERNANDEZ, Adán José Corcho. **Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções**: Rio de Janeiro, SBM, 2010.

[8] **PROBLEMA de Flávio Josefo.** Disponível em: `http://www.calendario.cnt.br/Paginas/Josefo.htm`. Último acesso em: 27/06/2014.

[9] MORGADO, Augusto César; **Relações de Recorrência.**: Rio de Janeiro. 2003. Vídeo (65 min). Disponível em: `http://video.impa.br/index.php?page=janeiro-de-2003`. Último acesso em: 27/06/2014.

[10] SANTOS, José Plínio Oliveira; MELLO, Margarida P.; MURARUI, Idani Teresinha Colzolari. **Introdução à Análise Combinatória**: Rio de Janeiro, Ciência Moderna, 2007.

Agradecimentos

Agradecimentos à revisores, colaboradores e agências de fomento.