

# Filtragem de sinais via limiarização de coeficientes wavelet

## Signal denoising via wavelet thresholding

Alice de Jesus Kozakevicius\*<sup>1</sup> e Fábio Mariano Bayer<sup>†2</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Matemática, Universidade Federal de Santa Maria

<sup>2</sup>Departamento de Estatística e LACESM, Universidade Federal de Santa Maria

### Resumo

O presente artigo aborda o tópico de filtragem de sinais via limiarização de coeficientes wavelets. É apresentada uma revisão dos principais resultados da área, desde os artigos clássicos e seminais até artigos no estado da arte, com enfoque em aplicações e aspectos metodológicos de filtragem wavelet. Uma breve discussão sobre transformadas wavelets é dada, assim como uma descrição detalhada e didática do método de limiarização de coeficientes wavelets. Os principais métodos de determinação de limiares de truncamento são descritos e aplicados em filtragem de sinais unidimensionais e bidimensionais. Esses experimentos evidenciam o bom desempenho da técnica de filtragem associada à transformada wavelet.

**Palavras-chave:** Análise multirresolução, filtragem de sinais, limiarização, wavelet.

### Abstract

The current work addresses topics related to signal filtering via wavelet shrinkage. Wavelets techniques applied to signal filtering go back to the 80's and an overview about the main results in the area are presented, as well as the most recent contributions, concerning applications and methodological aspects involved. A short discussion about wavelets and a detailed presentation about the threshold operation are given. The main methods to define the threshold values are also described and their performances are tested through numerical simulations for 1D and 2D data. The presented results highlight the potential of associating wavelet methods to signal denoising techniques.

**Keywords:** Multiresolution analysis, signal denoising, threshold value, wavelet shrinkage.

\*A. J. Kozakevicius: alicek@ufsm.br

†F. M. Bayer: bayer@ufsm.br

Recebido: 21/01/2014 Revisado: 11/04/2014

## 1 Introdução

No final da década de 80, dois trabalhos inovadores, um devido a Ingrid Daubechies (Daubechies, 1988) e outro a Stéphane Mallat (Mallat, 1989), estabeleceram uma base matemática sólida para o desenvolvimento de métodos wavelets. Eles apresentaram à comunidade científica o grande potencial de se decompor sinais (imagens, volumes, séries temporais) em suas componentes elementares ao longo de diferentes escalas. Daubechies construiu a primeira base ortogonal de funções wavelets com suporte compacto (funções não nulas apenas em um intervalo limitado e fechado da reta), enquanto que Mallat identificou o importante conceito de análise multirresolução (AMR). A AMR, considerada a pedra fundamental da teoria moderna de métodos wavelets, permitiu a obtenção de algoritmos rápidos para as transformadas wavelets discretas através de seus filtros. Desde então, a quantidade de aplicações em diferentes áreas da ciência e da engenharia cresceu continuamente, sendo que estes dois artigos estão entre as contribuições mais relevantes e mais citadas na literatura científica. Até 2003 cada um desses trabalhos possuía mais de 1500 citações, segundo levantamento feito em Unser et al. (2003). De lá para cá, segundo a base de dados do Google Scholar, no início do ano de 2014, os artigos Daubechies (1988) e Mallat (1989) possuíam, respectivamente, 8218 e 17911 citações. Neste cenário, nas últimas décadas os métodos wavelet têm conquistado espaço frente aos tradicionais métodos de Fourier. Isso se deve, especialmente, à capacidade natural das wavelets de representar dados não estacionários e lidar com características desses dados, contidas em vários níveis de resolução (Mallat, 2008).

Outra importante questão que tem estimulado a pesquisa de métodos wavelets é a busca por representações esparsas de sinais. Essas representações trazem vantagens imediatas para aplicações envolvendo regularização, compressão de dados e redução de ruído. Neste sentido, o trabalho pioneiro que associa wavelets a métodos estatísticos é o de David Donoho e Iain Johnstone (Donoho e Johnstone, 1992, 1998), no qual o grande *insight* sobre transformadas wavelets explorado é o poder de transformar sinais densos em vetores esparsos com relativamente poucas entradas significativas. A partir deste trabalho, que representou o marco zero na análise por trás da teoria de wavelets com conceitos e aplicações em estatística, wavelets têm sido utilizadas extensivamente nos mais diferentes tópicos estatísticos (Abramovich et al., 2000; Nason e Silverman, 2000; Nason, 2011). Algumas importantes áreas nas quais os métodos wavelet têm contribuído significativamente são: estimação de densidade (Donoho et al., 1996; Müller e Vidakovic, 1998; Herrick et al., 2001; Davies e Kovac, 2004; Reynaud-

Bouret et al., 2011), problemas inversos (Angulo e Ruiz-Medina, 1999), detecção de pontos de mudança e de bordo (Daubechies, 1992; Mallat e Hwang, 1992; Wang, 1995; Bailey et al., 1998; Ogden e Lynch, 1999; Xue et al., 2014), análise de séries temporais (Morettin, 1996; Priestley, 1996; Morettin, 1997; Percival e Walden, 1999; Nason et al., 2000; Bayer e Souza, 2010; Tapani e Kozakevicius, 2012), regressão não paramétrica (P. e Silverman, 1994; Fox, 2000; Nason e Silverman, 2000; Fox, 2002) e redução ou anulação de ruídos em sinais (Donoho e Johnstone, 1994b; Donoho et al., 1995; Donoho e Johnstone, 1995; Johnstone e Silverman, 2005; Poornachandra, 2008; Bayer e Kozakevicius, 2010).

Dentre estes vários tópicos de pesquisa, a filtragem de sinais, tema central deste artigo, tem mantido papel de destaque (Singer et al., 2009), uma vez que sinais são inevitavelmente corrompidos por ruídos durante sua aquisição ou transmissão. O principal objetivo dos procedimentos de filtragem é remover esses ruídos, mantendo as características importantes do sinal. No entanto, esta não é uma tarefa fácil ou imediata, especialmente no caso de sinais biomédicos, para os quais a manutenção das informações relevantes do sinal é fundamentalmente necessária na realização de diagnósticos posteriores (Mochimaru e Fujimoto, 2002).

Novamente nesta área Donoho e seus colaboradores têm um papel seminal, abrindo uma nova linha de pesquisa e um novo modo de tratar os problemas através de um formalismo envolvendo técnicas analíticas (Donoho e Johnstone, 1994b,a; Donoho, 1995; Donoho e Johnstone, 1995; Donoho et al., 1995; Donoho e Johnstone, 1998). Estes trabalhos encontram-se publicados em importantes periódicos como *Biometrika*, *Journal of the American Statistical Association*, *Journal of the Royal Statistical Society: Series B*, *IEEE Transactions on Information Theory* e *The Annals of Statistics*, apresentando aspectos teóricos e práticos a respeito de filtragem wavelet por meio de limiarização dos coeficientes wavelet, técnica abordada em detalhes na Seção 3.

O método de filtragem wavelet pode ser entendido como um problema em regressão não-paramétrica. O modelo de regressão paramétrico usual pode ser escrito como

$$y_i = f(\beta, \mathbf{x}_i) + \epsilon_i,$$

no qual  $f(\cdot)$  é uma função linear,  $\beta$  é o vetor paramétrico a ser estimado,  $\mathbf{x}_i$  é o vetor de covariáveis preditoras conhecidas e  $\epsilon_i$  é o termo de erro, ou ruído, assumido independente e normalmente distribuído, com média zero e variância constante, isto é,  $\epsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ . No caso do modelo de regressão linear normal clássico o vetor paramétrico  $\beta$  é estimado via método dos mínimos quadrados ordinários. Já o modelo de regressão não-

paramétrico pode ser escrito por

$$y_i = f(x_i) + \epsilon_i.$$

Neste caso, o objetivo é recuperar a função  $f$  a partir dos dados com ruído,  $y_i$ , sem assumir qualquer estrutura paramétrica para  $f$  (Abramovich et al., 2000). Uma solução básica para esta abordagem não paramétrica é considerar a função desconhecida  $f$  expandida como uma série de Fourier e então estimar os coeficientes de Fourier a partir dos dados (Abramovich et al., 2000; Morrettin, 1996). Contudo, em uma abordagem envolvendo expansões em série wavelet, esta função desconhecida  $f$  é estimada por meio da limiarização ou encolhimento dos coeficientes wavelet da expansão da  $f$ . Esta última abordagem é a considerada neste trabalho.

Nos últimos anos, os procedimentos de filtragem de sinais por meio de limiarização ou encolhimento dos coeficientes wavelets vêm ganhando muita atenção da comunidade científica, como pode ser visto em (Chang et al., 2000; Chen e Han, 2005; Johnstone e Silverman, 2005; Smith et al., 2008; Poornachandra, 2008; Bayer e Kozakevicius, 2010; Kamilov et al., 2012; Lun et al., 2012; Remenyi e Vidakovic, 2013). Esses trabalhos abordam aspectos teóricos e práticos sobre transformada wavelet em filtragem de sinais. Algumas aplicações recentes de filtragem wavelet incluem: filtragem de sinais biomédicos (Kozakevicius et al., 2005), filtragem de imagens e compressão (Chang et al., 2000), filtragem de imagens hiper-espectrais (Chen e Qian, 2011), redução de ruídos speckle em image de radar de abertura sintética (Parrilli et al., 2012), suavização de dados genômicos (Hatsuda, 2012), detecção de anomalias em imagens de sonar (Nelson e Kingsbury, 2012) e em imagens biomédicas (Asadzadeh et al., 2013), atenuação de ruídos sísmicos (Goudarzi e Riahi, 2012), e redução de ruídos para sinais caóticos (Han e Chang, 2013).

Nesta perspectiva, dada a importância e o crescimento do tema nas últimas décadas, torna-se relevante a proposição de textos em português que situem o estado da arte na área, ao mesmo tempo que revisem aspectos teóricos clássicos relacionados. Este trabalho tem como objetivo trazer uma contribuição neste sentido, abordando de maneira didática técnicas wavelet aplicadas à filtragem de sinais unidimensionais e bidimensionais.

Para cumprir o objetivo proposto, este trabalho apresenta na Seção 2 uma introdução para a transformada wavelet discreta através do conceito de análise multirresolução. Além disso, formulações para as transformadas 1D e 2D e suas inversas são apresentadas na forma matricial. Na Seção 3 é apresentada a técnica de filtragem de sinais utilizando limiarização de coeficientes wavelet, bem como um breve resumo sobre os principais métodos disponíveis na literatura. Aplicações em dados reais e simulados, unidimensionais e bidimensionais, são apre-

sentadas na Seção 4 e as considerações finais são então feitas na última seção.

## 2 A transformada wavelet

Existem várias famílias de funções wavelets, cada uma satisfazendo uma série de propriedades, a partir das quais suas formulações são obtidas. Neste trabalho são consideradas as funções wavelets da família de Daubechies, que possuem suporte compacto, são ortonormais e formam uma base para o espaço das funções de quadrado integrável,  $L^2(\mathbb{R})$ . O enfoque principal desta seção é a formulação de transformadas discretas envolvendo as wavelets de Daubechies. Para uma abordagem aprofundada sobre representação multirresolução e a construção de wavelets ortonormais, recomenda-se a referência clássica de Daubechies (1988). Já para uma abordagem mais aplicada e com enfoque nos algoritmos rápidos das transformadas wavelets, recomenda-se a tese de Olé Nielsen (Nielsen, 1998).

Na análise de Fourier, os dados representados em relação à variável tempo (ou espaço) são transformados e representados em relação à frequência. No entanto, a informação quanto à localização de uma certa frequência dentro destes dados (sinal, função ou imagem) é perdida. Na análise wavelet, diferentemente da anterior, os dados são representados em relação tanto ao tempo quanto a um segundo novo parâmetro: a escala. Essa nova abordagem permite uma fatoração dos dados (discretos ou contínuos) de tal modo que estes fiquem localizados em ambos domínios, o que torna as wavelets uma forte ferramenta para análise de sinais não-estacionários, ou com descontinuidades.

Uma das diversas maneiras de se introduzir a teoria sobre funções wavelets ortonormais é através do conceito de análise multirresolução (AMR). O principal objetivo da AMR é oferecer uma infraestrutura para que as funções em  $L^2(\mathbb{R})$  possam ser representadas dependendo de diferentes escalas (ou níveis de resolução). Assim, simplificada, uma AMR pode ser definida por uma família de subespaços encaixados de  $L^2(\mathbb{R})$ ,  $0 \dots \subset V_j \subset V_{j+1} \subset \dots \subset L^2(\mathbb{R})$ , cuja união é densa no espaço todo e a intersecção é apenas a trivial (o subespaço nulo). Cada subespaço  $V_j, j \in \mathbb{Z}$ , está relacionado com os demais  $V_{j-1}$  e  $V_{j+1}$  por fatores de escala:  $f(x) \in V_j \Rightarrow f(2x) \in V_{j+1}$ . Existe uma base ortonormal  $\beta$  para o espaço  $V_0$ , dada por translações de uma mesma função  $\phi(x)$ , chamada função escala:  $\beta = \{\phi(x - k), k \in \mathbb{Z}\}$ . Assim, devido à relação de escala entre os espaços encaixados,  $\{\phi(2^j x - k), k \in \mathbb{Z}\}$  é uma base para  $V_j$  e  $\{\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \phi(2^j x - k), k \in \mathbb{Z}\}$  é a base ortonormal correspondente.

Além dos subespaços iniciais que geram a estrutura da AMR, existem seus complementos ortogonais,  $W_j$ ,





$c_{j_0}$	$\dots$	$d_{M-2}^v$	$d_{M-1}^v$
$\vdots$	$\ddots$		
$d_{M-2}^h$	$d_{M-2}^d$		
$d_{M-1}^h$		$d_{M-1}^d$	

Figura 1: Representação dos coeficientes wavelets bidimensionais considerando AMR em  $M$  níveis.

Uma vez obtida a transformada wavelet dos dados iniciais, o processo de filtragem se dá através de operações realizadas sobre os coeficientes wavelets das fatorações obtidas. Na próxima seção este tópico é abordado em detalhes.

### 3 Filtragem wavelet

Quando informações discretas são obtidas através de medições ou manipuladas por aplicativos computacionais e então armazenadas digitalmente, em alguma etapa deste processo as informações podem ser corrompidas por diversas formas de interferência, denominadas de ruídos. As técnicas de limiarização dos coeficientes de uma série wavelet tem como objetivo a redução, ou mesmo eliminação, do ruído presente em um sinal.

Estas técnicas estão baseadas na manipulação dos coeficientes wavelet, que podem ter seus valores diminuídos ou anulados nos vários níveis de fatoração gerados pela TW direta (Bayer e Kozakevicius, 2010). Após esse processo, é aplicada a TW inversa na série wavelet com coeficientes limiarizados (Morettin, 1999). O sinal reconstruído será uma aproximação do sinal sem ruído.

Considera-se o vetor  $T$ -dimensional  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_T)$ , com  $T = 2^n$  e  $n \in \mathbb{Z}^+$ , sendo cada componente uma amostra do sinal sem ruído  $f$  em um instante  $t_i$ , ou seja  $f_i = f(t_i)$ . Considera-se ainda o vetor de ruído gaussiano  $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_T)$ , cujas componentes são variáveis aleatórias independentes tais que  $\epsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ , para  $i = 1, \dots, T$ . Desta forma, um sinal amostrado  $\mathbf{y}$  pode ser considerado como uma soma de uma componente

limpa  $\mathbf{f}$  e um ruído  $\epsilon$ , ou seja:

$$\mathbf{y} = \mathbf{f} + \epsilon,$$

$$(y_1, y_2, \dots, y_T) = (f_1 + \epsilon_1, f_2 + \epsilon_2, \dots, f_T + \epsilon_T).$$

Na prática, a única informação conhecida é o vetor  $\mathbf{y}$ , e o objetivo então é, a partir de  $\mathbf{y}$ , obter uma estimativa para a componente  $\mathbf{f}$ .

Por ser uma transformação linear, temos que

$$TW(\mathbf{y}) = TW(\mathbf{f} + \epsilon),$$

$$TW(\mathbf{y}) = TW(\mathbf{f}) + TW(\epsilon),$$

e ainda, por ser ortogonal, a TW preserva a energia do sinal analisado. Portanto, no caso deste sinal ser um ruído gaussiano, suas propriedades de média zero e variância constante  $\sigma^2$  são preservadas após a transformação. Em termos de coeficientes wavelets, esta constatação pode ser expressa por:  $d_{j,k} = w_{j,k} + \sigma z_{j,k}$ , sendo  $d_{j,k}$  os coeficientes wavelet de  $\mathbf{y}$ ,  $w_{j,k}$  os coeficientes wavelets de  $\mathbf{f}$  e  $z_{j,k} \sim N(0,1)$ . Ou seja, os coeficientes wavelets de uma amostra com ruído podem ser escritos como os coeficientes wavelets sem ruído adicionados a ruído branco (Morettin, 1999).

A estimativa  $\hat{\mathbf{f}}$  é obtida através da limiarização dos coeficientes wavelet de  $\mathbf{y}$ . A operação  $\text{thr}_\lambda(\cdot)$  reduz ou anula os coeficientes  $d_{j,k}$  menores do que certo escalar  $\lambda$ . As duas propostas de truncamento mais difundidas (Morettin, 1999), denominadas de hard e soft thresholding, são dadas, respectivamente, por:

$$\text{thr}_\lambda^H(d_{j,k}) = \begin{cases} 0, & \text{se } |d_{j,k}| \leq \lambda \\ d_{j,k}, & \text{se } |d_{j,k}| > \lambda \end{cases},$$

$$\text{thr}_\lambda^S(d_{j,k}) = \begin{cases} 0, & \text{se } |d_{j,k}| \leq \lambda \\ \text{sign}(d_{j,k})(|d_{j,k}| - \lambda), & \text{se } |d_{j,k}| > \lambda \end{cases}.$$

Segundo Morettin (1999) e Smith et al. (2008), o soft thresholding apresenta vieses maiores, enquanto que o hard thresholding tem viés menor, porém variância maior. Portanto a escolha entre hard ou soft é muitas vezes feita caso a caso, dependendo da aplicação. Contudo, os métodos de truncamento hard e soft não são os únicos possíveis. Vários métodos de truncamento de coeficientes wavelets podem ser encontrados na literatura, como em Gao e Bruce (1997); Gao (1998); Antoniadis e Fan (2001); Antoniadis (2007); Smith et al. (2008).

Dada a função  $\text{thr}_\lambda(\cdot)$ , o procedimento para filtragem do sinal  $\mathbf{y}$ , por meio de limiarização dos coeficientes wavelets, segue as seguintes etapas:

1. Aplicação da TW direta no sinal original:  $TW(\mathbf{y}) = \mathbf{d}$ ;
2. Limiarização dos coeficientes wavelets  $\mathbf{d}$  obtidos no passo anterior:  $\text{thr}_\lambda(\mathbf{d}) = \tilde{\mathbf{d}}$ ;
3. Aplicação da TW inversa na série de coeficientes wavelets limiarizados:  $TW(\tilde{\mathbf{d}}) = \hat{\mathbf{f}}$ .

No final do procedimento de filtragem é obtida uma estimativa  $\hat{f}$  do sinal sem ruído  $f$ . A Figura 2 mostra uma representação desse procedimento.

A Figura 2(c) apresenta a função Heavisine, bastante utilizada em experimentos computacionais da área de filtragem de sinais, somada a um ruído gaussiano. Aplicando a transformada wavelet, utilizando 5 níveis na AMR, obtém-se os coeficientes wavelets apresentados na Figura 2(a). As linhas horizontais tracejadas da Figura 2(a) representam o limiar  $\lambda$  selecionado para o truncamento dos coeficientes wavelets. Esses coeficientes truncados, utilizando hard thresholding, são apresentados na Figura 2(b). Nota-se que todos os coeficientes com magnitudes menores que  $\lambda$  foram anulados. Por fim, aplicando a transformada wavelet inversa aos coeficientes limiarizados da Figura 2(b) obtém-se o sinal filtrado mostrado na Figura 2(d).

Nota-se que na filtragem de sinais via limiarização de coeficientes wavelet a seleção do limiar de corte  $\lambda$  é ponto fundamental para o bom desempenho do processo (Chen e Han, 2005). Na literatura, existem diferentes métodos para determinação desse valor de limiar (Poornachandra, 2008), de acordo com suposições impostas a respeito da natureza do ruído. Na seção a seguir são apresentados alguns dos principais métodos de determinação de  $\lambda$ .

### 3.1 Determinação do limiar de corte

Para a determinação do limiar de corte há basicamente duas abordagens: global e adaptativa. Na abordagem global um único valor  $\lambda$  é considerado para limiarização de todos os coeficientes wavelets em qualquer nível  $j$ . Na abordagem adaptativa são determinados diferentes valores  $\lambda_j$  para cada nível de detalhes  $j$ . Apresentam-se a seguir as principais formulações para determinação do limiar de corte  $\lambda$ .

#### 3.1.1 VisuShrink

Em Donoho e Johnstone (1994b) é proposto um estimador do limiar de corte denominado VisuShrink, ou Universal Threshold, no qual é dado por:

$$\lambda = \hat{\sigma} \sqrt{2 \log(T)},$$

sendo  $\hat{\sigma}$  um estimador do desvio-padrão do ruído e  $T$  a dimensão do vetor de entrada. Donoho e Johnstone (1994b) e Donoho e Johnstone (1994a) sugerem a utilização de um estimador robusto para  $\sigma$ , com base nos coeficientes wavelets no nível mais fino, da seguinte forma:

$$\hat{\sigma} = \frac{\text{mediana}(\mathbf{d}_{M-1})}{0.6745}. \quad (10)$$

#### 3.1.2 SureShrink

O procedimento SureShrink (Donoho e Johnstone, 1995) minimiza um estimador não-viesado do risco de Stein (SURE - *Stein Unbiased Risk Estimator*) a cada nível de resolução  $j$  (Stein, 1981). Este processo caracteriza uma operação adaptativa, uma vez que a cada nível a determinação do limiar de corte depende dos coeficientes wavelets do sinal. Sendo  $\sigma_j$  o parâmetro de dispersão e  $T_j$  o número de coeficientes wavelet do nível  $j$ , define-se o limiar de corte por:

$$\lambda_j = \underset{0 \leq t \leq \sigma_j \sqrt{2 \log(T_j)}}{\operatorname{argmin}} \text{SURE}(\mathbf{d}_j, t),$$

sendo

$$\text{SURE}(\mathbf{d}_j, t) = T_j - 2 \sum_{k=1}^{T_j} I(|d_{j,k}| \leq t) + \sum_{k=1}^{T_j} \min(|d_{j,k}|, t)^2,$$

no qual  $\sigma_j$  é a medida de dispersão para cada nível  $j$  e

$$I(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = \text{verdadeiro} \\ 0, & \text{se } x = \text{falso} \end{cases}.$$

Neste caso, pode-se considerar o seguinte estimador para  $\sigma_j$ :

$$\hat{\sigma}_j = \frac{\text{mediana}(\mathbf{d}_j)}{0.6745}.$$

#### 3.1.3 BayesShrink

Chang et al. (2000) propõem um limiar adaptativo para filtragem de imagens baseado em argumentos Bayesianos. Este limiar possui uma forma fechada bastante simples, dada por:

$$\lambda_j = \frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}_{X_j}},$$

em que  $\hat{\sigma}$  é o desvio padrão dos detalhes no nível mais fino, conforme Equação (10), e  $\hat{\sigma}_{X_j} = \sqrt{\max(\hat{\sigma}_{\mathbf{d}_j}^2 - \hat{\sigma}^2, 0)}$ ,

em que  $\hat{\sigma}_{\mathbf{d}_j}^2 = \frac{\sum_{k=1}^{T_j} d_{j,k}^2}{T_j}$ . No caso em que  $\hat{\sigma}_{X_j} = 0$  então  $\lambda_j = \infty$ . Na prática, isso implica que nenhum coeficiente neste nível  $j$  será limiarizado.

O BayesShrink foi proposto originalmente para filtragem de imagens, de forma que suas notação e definição diferem ligeiramente das aqui apresentadas. Entende-se que a forma apresentada no presente trabalho é uma boa generalização do BayesShrink, podendo ser considerada tanto para filtragem de sinais unidimensional quanto para sinais bidimensionais.

#### 3.1.4 S-median

Em Poornachandra (2008) é proposto o limiar denominado S-median. A determinação deste limiar para limiarização dos coeficientes wavelet é fortemente baseada

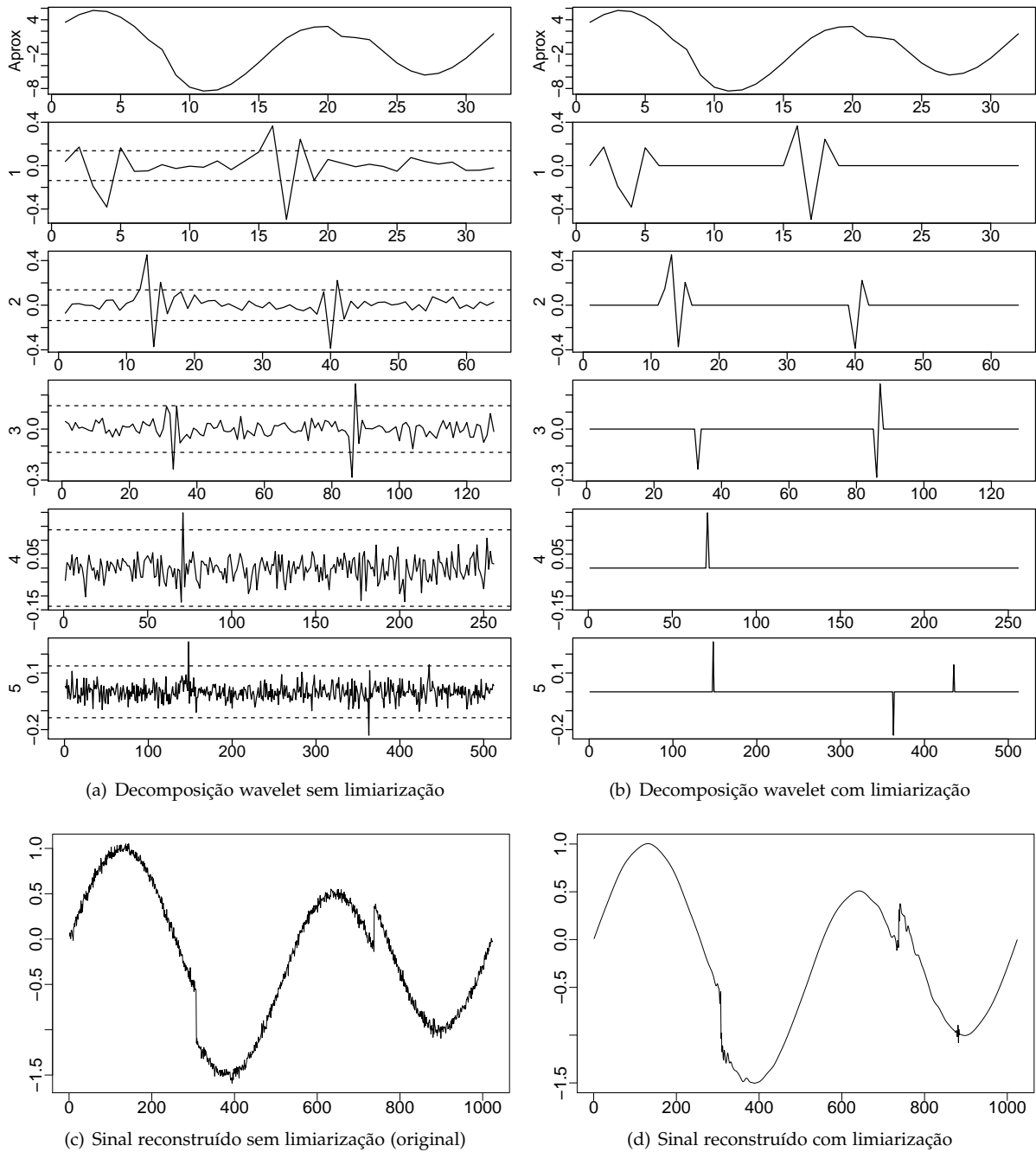


Figura 2: Decomposição wavelet da função Heavisine com ruído amostrada como 1024 pontos uniformemente espaçados. A linha tracejada em (a) é o limiar  $\lambda$  considerado.



no clássico VisuShrink. O S-median pode ser entendido com uma versão adaptativa do VisuShrink, dado por:

$$\lambda_j = \frac{\hat{\sigma}_j \sqrt{2 \log(T)}}{S_j + b},$$

sendo  $S_j = 2^{(M-1)-j/(M-1)}$  o parâmetro dependente do nível e  $b$  é um parâmetro *tuning*, sugerido  $b = 1$  como valor padrão.

### 3.1.5 SPC-Threshold

O limiar adaptativo SPC-Threshold, proposto em Bayer e Kozakevicius (2010), é motivado pela utilização dos gráficos de controle de Shewhart (Shewhart, 1931; Montgomery, 2009), ferramenta do controle estatístico de processo (SPC - *Statistical Process Control*). Os gráficos de controle são geralmente utilizados para alcançar um estado de controle estatístico e para monitorar um determinado processo, distinguindo causas de variabilidade entre comuns e especiais. As comuns seriam originárias da variabilidade natural do processo, cuja variação possui um comportamento puramente aleatório, indicando que o processo está sob controle. As causas especiais revelam a formação de padrões distintos, acusando que algo incomum está influenciando o processo.

Fazendo uma analogia entre os gráficos de controle e limiarização na filtragem de sinais via TW, deseja-se verificar quais coeficientes wavelets  $d_{j,k}$  são puramente aleatórios (ruído) e quais representam alguma causa especial de comportamento (neste caso, o comportamento determinado pelo sinal de interesse). Sendo assim, considerando o vetor  $\mathbf{d}_j$  com os  $T_j$  coeficientes wavelets da escala  $j$ , o limiar de corte  $\lambda_j$  do SPC-Threshold é estabelecido através das seguintes etapas:

1. Obter uma estimativa de  $\sigma_j$  por meio de  $S_j = \sqrt{\frac{1}{T_j-1} \sum_{k=1}^{T_j} (d_{j,k} - \bar{d}_j)^2}$ , sendo  $\bar{d}_j = \frac{1}{T_j} \sum_{k=1}^{T_j} d_{j,k}$  a média aritmética dos coeficientes wavelets do nível  $j$ ;
2. Se  $|d_{j,k}| > pS_j$ , para  $p$  usualmente igual a 2 ou 3, então este coeficiente é descartado do vetor  $\mathbf{d}_j$  e retorna-se a etapa (1) para obtenção de um novo valor  $S_j$ . Se  $|d_{j,k}| < pS_j, \forall k$ , então prossegue-se a etapa (3);
3. O valor do limiar de corte é dado por  $\lambda_j = pS_j$ .

Destaca-se que  $p$  é um escalar de valor arbitrário, geralmente considerado igual a 2 ou 3, como analogia aos limites inferior e superior dos gráficos de controle. Os limites superior e inferior de controle são determinados como sendo a média do processo mais e menos  $p$  desvios-padrão. Esse valor pode ser alterado de acordo

com o usuário. Para valores maiores de  $p$  o sinal se torna visualmente mais limpo, mas com um viés maior.

Além dessa abordagem adaptativa, na qual um  $\lambda_j$  para cada nível de resolução  $j$  é determinado, pode-se ter uma abordagem global. Para o SPC-Threshold global, o vetor  $\mathbf{d}_j$  é construído agora com todos os coeficientes wavelets  $d_{j,k}$  de todos os níveis de faturação da TW.

## 4 Resultados numéricos

Nesta seção são apresentados resultados numéricos de aplicações dos diferentes limiares de coeficientes wavelet, introduzidos na Seção 3.1, na filtragem de sinais unidimensionais e bidimensionais. Esses resultados são apresentados somente em caráter ilustrativo e explorativo. Comparações de desempenho devem ser realizadas por meio de extensivos estudos de simulação, considerando diferentes cenários, sinais e níveis de ruído.

Os resultados apresentados neste artigo foram obtidos por meio de implementações próprias no software R (R Core Team, 2013). Contudo, existem pacotes e programas computacionais disponíveis gratuitamente na internet que são capazes de calcular a TW e aplicar limiares para filtragem de sinais, além de calcular outras estatísticas e quantidades de interesse. Uma das implementações mais usuais, principalmente para estatísticos e para usuários do software R, é o pacote *Wavethresh* (Nason, 2013, 2011). Este é um pacote que pode ser facilmente adicionado no R, disponível para Windows, Linux e Mac. Uma outra opção, mais voltada para engenheiros e usuários de Matlab, é a biblioteca *WaveLab*. Essa biblioteca de rotinas do Matlab é livremente disponível na internet no seguinte endereço web <http://statweb.stanford.edu/~wavelab/>.

### 4.1 Sinais unidimensionais

Nos resultados desta subseção foi considerada a função Doppler com  $T = 1024 = 2^{10}$  observações igualmente espaçadas. Esta função é utilizada em vários trabalhos da área, como em Donoho e Johnstone (1994b, 1995); Morettin (1999), sendo definida por:

$$f(t_i) = \sqrt{(t_i(1-t_i))} \sin(2,1\pi/(t_i + 0,05)),$$

para  $t_i = 1, \dots, T$ . Uma representação gráfica da função Doppler pode ser verificada na Figura 3.

À função Doppler, representada na Figura 3, foi somado um ruído gaussiano com média zero e variância igual a 0,06,  $\epsilon_i \sim N(0;0,06)$ , resultando no sinal apresentado na Figura 4(a). Este sinal foi então filtrado por meio da limiarização dos coeficientes wavelets utilizando diferentes técnicas para determinação dos limiares de corte  $\lambda$ . Para essa filtragem foram utilizadas wavelet de Daubechies com oito momentos nulos (ou seja, filtros

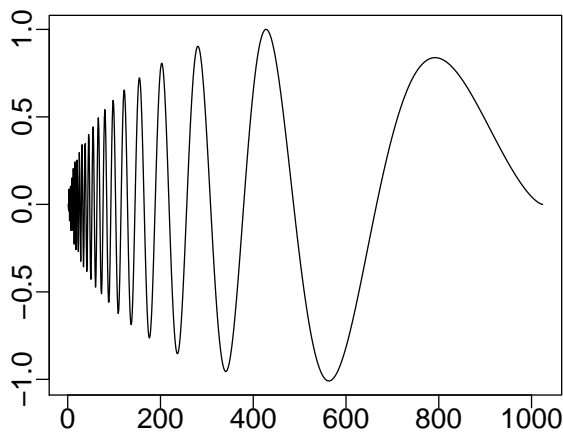


Figura 3: Função Doppler.

de tamanho 16), cinco níveis na AMR e soft threshold como método de truncamento. Para o SPC-Threshold foi considerado  $p = 2$ , como sugerido em Bayer e Koza-kevicius (2010). Os resultados visuais, para comparação qualitativa, estão apresentados na Figura 4.

Para uma avaliação quantitativa foi incluída a medida relação sinal-ruído (SNR) nos subtítulos das figuras. Esta medida é amplamente utilizada em telecomunicações e outras diversas áreas que possuem o objetivo de medir um sinal ruidoso. A SNR entre o sinal real sem ruído  $\mathbf{f}$  e o sinal filtrado  $\hat{\mathbf{y}}$  pode ser escrita da seguinte forma (Salomon, 2000, p. 272):

$$\text{SNR}(\mathbf{f}, \hat{\mathbf{y}}) = 10 \log_{10} \left( \frac{\text{EQM}(\mathbf{f})}{\text{EQM}(\mathbf{f} - \hat{\mathbf{y}})} \right),$$

em que o erro quadrático médio é definido por  $\text{EQM}(\mathbf{f} - \hat{\mathbf{y}}) = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T (f_i - \hat{y}_i)^2$ . O melhor sinal é aquele que apresenta o maior valor da medida SNR.

Analisando os resultados da Figura 4, tanto os gráficos quanto os valores de SNR, nota-se que o limiar Universal apresenta um sinal filtrado visualmente mais limpo que os demais. Por este motivo ele é também conhecido como VisuShrink. Por outro lado, o mesmo VisuShrink apresenta o pior resultado em termos de medida SNR. O sinal que apresenta visualmente o pior resultado é o sinal filtrado via BayesShrink, contendo grande nível de ruído no sinal filtrado. O melhor resultado em termos de medida SNR é apresentado pelo SPC-Threshold que, apesar de ainda conter algum resíduo, também possui boa qualidade visual.

## 4.2 Sinais bidimensionais

Nesta subseção apresentam-se experimentos computacionais semelhantes aos da subseção anterior, com a diferença de serem considerados agora sinais bidimensionais, ou seja, imagens. A filtragem de imagens é um importante ramo dentro do processamento de sinais, cujas aplicações vão desde imagens médicas à astronomia



(a) Imagem Lena original



(b) Decomposição AMR em um nível

Figura 5: Imagem Lena considerada nos experimentos computacionais.

extragaláctica (Swami et al., 2009; Gonzalez e Woods, 2002).

Para este experimento foi considerada a imagem Lena, obtida do banco público de imagens USC-SIPI (2013). A imagem, originalmente apresentada colorida (em RGB), foi convertida para uma escala de tons de cinza de 8 bits. Com isso, a imagem se torna uma matriz de ordem  $512 \times 512$  com elementos entre zero e 255. Esta imagem Lena pode ser visualizada na Figura 5(a), assim como sua decomposição em um nível de resolução na Figura 5(b)

A imagem Lena foi corrompida com um ruído gaussiano com média zero e desvio-padrão igual a 13,3. A imagem ruidosa resultante pode ser visualizada na Figura 6(a). Esta imagem foi filtrada utilizando wavelets

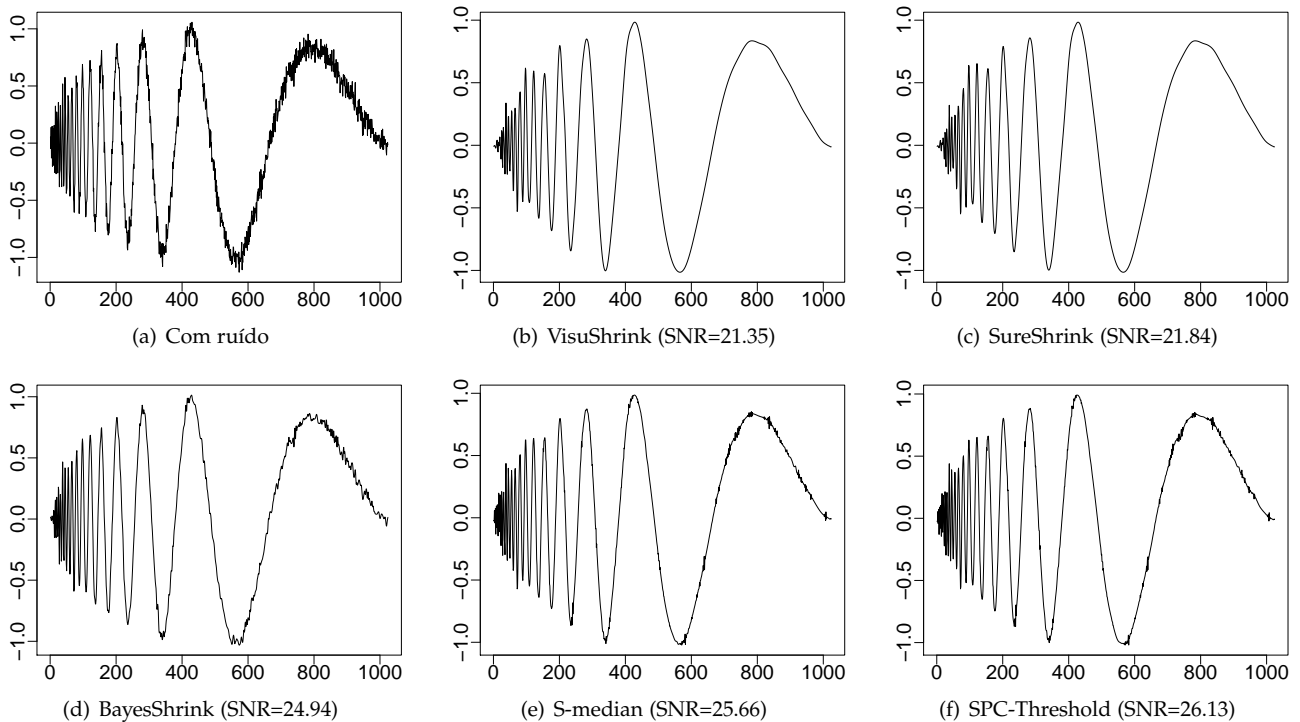


Figura 4: Função doppler filtrada utilizando vários técnicas.

de Daubechies com oito momentos nulos, dois níveis na AMR, soft threshold e diferentes limiares de truncamento. Assim como no caso unidimensional, para o SPC-Threshold foi considerado  $p = 2$ . Para uma avaliação quantitativa foi considerada a medida PSNR. Esta é uma medida tradicional e amplamente utilizada para medir qualidade de imagens, principalmente em imagens comprimidas. A PSNR entre a imagem original  $\mathbf{X}$  e a imagem filtrada  $\hat{\mathbf{A}}$  é definida da seguinte forma (Salomon, 2000, p. 272):

$$\text{PSNR}(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{A}}) = 10 \log_{10} \left( \frac{\text{MAX}^2}{\text{EQM}(\mathbf{X} - \hat{\mathbf{A}})} \right),$$

em que MAX é o máximo valor possível em um pixel da imagem. Neste caso, considerando imagens de 8 bit em escala de cinza,  $\text{MAX}=255$ . Assim como a SNR, mais utilizada para avaliação de sinais unidimensionais, maiores valores de PSNR indicam imagens de melhor qualidade. Os resultados da filtragem da imagem Lena por meio das diferentes técnicas consideradas são visualizados na Figura 6.

Em termos visuais há várias semelhanças entre as imagens filtradas. O desempenho do SureShrink, Figura 6(c), mostra-se um pouco pior em termos visuais, sendo possível ainda a visualização de ruído. Já as imagens filtradas pelos demais métodos apresentam qualidades visuais muito semelhantes, possuindo melhor contraste do que as imagens das Figuras 6(a) e 6(c). Os resultados visuais estão de acordo com os valores da

medida PSNR. Nota-se que o BayesShrink, Figura 6(d), obteve uma imagem filtrada com maior PSNR, porém, muito próximo aos valores de PSNR das imagens filtradas com VisuShrink, S-median e SPC-Threshold, Figuras 6(b), 6(e) e 6(f). Confirmando a impressão visual, a medida PSNR da imagem filtrada utilizando SureShrink obteve menor medida PSNR.

## 5 Considerações finais

O presente artigo aborda o tópico de filtragem de sinais via limiarização de coeficientes wavelets. É apresentada uma revisão da área, referenciando desde os artigos clássicos de Donoho e colaboradores até artigos no estado da arte que abordam aplicações e aspectos metodológicos de filtragem wavelet. Uma breve introdução à transformada wavelet e à análise multirresolução é apresentada, seguida por uma descrição mais detalhada do método de limiarização de coeficientes wavelets. Os principais métodos de determinação de limiar de truncamento são descritos e aplicados à filtragem de sinais unidimensionais e bidimensionais. Pode-se verificar o bom desempenho da técnica de filtragem wavelet, com a qual os sinais filtrados se mostraram bastante similares aos sinais originais sem ruído. Os dois métodos que apresentam os melhores desempenhos nos experimentos considerados foram o SPC-Threshold e o BayesShrink.

A transformada wavelet tem-se mostrado cada vez mais versátil e capaz de auxiliar e melhorar o desempe-



Figura 6: Imagem Lena filtrada utilizando várias técnicas.

no de vários métodos em diversas áreas de aplicação. Ela apresenta potencialidades interessantes em diversos tópicos de engenharias e estatística, nos quais sua utilidade em filtragem de sinais se destaca. Além disso, os métodos wavelets também podem ser utilizados associados a outras técnicas estatísticas, como modelos de regressão, análise discriminante, modelos de séries temporais clássicos, análise de componentes principais, redes neurais, entre outros, para importantes aplicações, como por exemplo, em reconhecimento de padrão, previsão e classificação de dados.

## Agradecimentos

Os autores agradecem ao apoio financeiro concedido pela FAPERGS; PG2013 N. 1873-2552/13-0 e PG2013 N. 1950-2551/13-6SIAFEM.

## Referências

- Abramovich, F., Bailey, T. C., Sapatinas, T. (2000). Wavelet analysis and its statistical applications. *Journal of the Royal Statistical Society Series D (The Statistician)*, 49, 1–29.
- Angulo, J. M., Ruiz-Medina, M. D. (1999). Multi-resolution approximation to the stochastic inverse problem. *Advances in Applied Probability*, 31(4), 1039–1057.
- Antoniadis, A. (2007). Wavelet methods in statistics: some recent developments and their applications. *Statistics Surveys*, 1, 16–55.
- Antoniadis, A., Fan, J. (2001). Regularization of wavelet approximations. *Journal of the American Statistical Association*, 96(455), 939–955.
- Asadzadeh, M., Hashemi, E., Kozakevicius, A. (2013). On efficiency of combined Daubechies wavelets and statistical parameters applied in mammography. *Ap-*

- plied and Computational Mathematics an International Journal*, 12(3).
- Bailey, T. C., Sapatinas, T., Powell, K. J., Krzanowski, W. J. (1998). Signal detection in underwater sound using wavelets. *Journal of the American Statistical Association*, 93(441), 73–83.
- Bayer, F. M., Kozakevicius, A. J. (2010). SPC-threshold: uma proposta de limiarização para filtragem adaptativa de sinais. *Tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, 11(2), 121–132, in portuguese.
- Bayer, F. M., Souza, A. M. (2010). Wavelets e modelos tradicionais de previsão: Um estudo comparativo. *Revista Brasileira de Biometria*, 28, 40–61.
- Chang, S. G., Yu, B., Vetterli, M. (2000). Adaptive wavelet thresholding for image denoising and compression. *IEEE Transactions on Image Processing*, 9, 1532–1546.
- Chen, G., Qian, S. E. (2011). Denoising of Hyperspectral Imagery Using Principal Component Analysis and Wavelet Shrinkage. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 49(3), 973–980.
- Chen, Y., Han, C. (2005). Adaptive wavelet threshold for image denoising. *Electronics Letters*, 41.
- Cohen, A., Daubechies, I., Vial, P. (1993). Wavelets on the interval and fast wavelet transforms. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 1(1), 54–81.
- Daubechies, I. (1988). Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, XLI, 909–996.
- Daubechies, I. (1992). *Ten lectures on wavelets*. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Davies, P. L., Kovac, A. (2004). Densities, spectral densities and modality. *The Annals of Statistics*, 32(3), 1093–1136.
- Donoho, D., Johnstone, I. (1994a). Threshold selection for wavelet shrinkage of noisy data. Em: *Proceedings of the 16th Annual International Conference of the IEEE. Engineering Advances: New Opportunities for Biomedical Engineers.*, pp. A24–A25 vol.1.
- Donoho, D. L. (1995). De-noising by soft-thresholding. *IEEE Transactions on Information Theory*, 41, 613–627.
- Donoho, D. L., Johnstone, I. M. (1992). Minimax estimation via wavelet shrinkage. Relatório Técnico, Institute of Mathematical Statistics, presented as an IMS Special Invited Lecture at the Annual Meeting of the Institute of Mathematical Statistics, Atlanta, Georgia.
- Donoho, D. L., Johnstone, I. M. (1994b). Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage. *Biometrika*, 81, 425–455.
- Donoho, D. L., Johnstone, I. M. (1995). Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage. *Journal of the American Statistical Association*, 90(432), 1200–1224.
- Donoho, D. L., Johnstone, I. M. (1998). Minimax estimation via wavelet shrinkage. *The Annals of Statistics*, 26(3), 879–921.
- Donoho, D. L., Johnstone, I. M., Kerkyacharian, G., Picard, D. (1995). Wavelet shrinkage: Asymptopia? *Journal of the Royal Statistical Society: Series B*, 57(2), 301–369.
- Donoho, D. L., Johnstone, I. M., Kerkyacharian, G., Picard, D. (1996). Density estimation by wavelet thresholding. *The Annals of Statistics*, 24(2), 508–539.
- Fox, J. (2000). *Multiple and Generalized Nonparametric Regression*. Thousand Oaks CA: Sage..
- Fox, J. (2002). Nonparametric regression. Appendix to An R and S-PLUS Companion to Applied Regression.
- Gao, H. Y. (1998). Wavelet shrinkage denoising using the non-negative garrote. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 7(4), 469–488.
- Gao, H. Y., Bruce, A. G. (1997). Waveshrink with firm shrinkage. *Statistica Sinica*, 7, 855–874.
- Gonzalez, R. C., Woods, R. E. (2002). *Digital Image Processing*, 2º edn. Prentice Hall.
- Goudarzi, A., Riahi, M. A. (2012). Seismic coherent and random noise attenuation using the undecimated discrete wavelet transform method with WDGA technique. *Journal of Geophysics and Engineering*, 9(6), 619–631.
- Han, X., Chang, X. (2013). An intelligent noise reduction method for chaotic signals based on genetic algorithms and lifting wavelet transforms. *Information Sciences*, 218(0), 103 – 118.
- Hatsuda, H. (2012). Robust Smoothing of Quantitative Genomic Data Using Second-Generation Wavelets and Bivariate Shrinkage. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 59(8), 2099–2102.
- Herrick, D. R. M., Nason, G. P., Silverman, B. W. (2001). Some new methods for wavelet density estimation. *The Indian Journal of Statistics, Series A (1961-2002)*, 63(3), 394–411, special issue on Wavelets.
- Johnstone, I. M., Silverman, B. W. (2005). Empirical bayes selection of wavelet thresholds. *The Annals of Statistics*, 33(4), 1700–1752.

- Kamilov, U., Bostan, E., Unser, M. (2012). Wavelet Shrinkage With Consistent Cycle Spinning Generalizes Total Variation Denoising. *IEEE Signal Processing Letters*, 19(4), 187–190.
- Kozakevicius, A., Schmidt, A. (2013). Wavelet transform with special boundary treatment for 1D data. *Computational and Applied Mathematics*, 32(3), 447–457.
- Kozakevicius, A., Rodrigues, C., Nunes, R., Guerra-Filho, R. (2005). Adaptive ECG filtering and QRS detection using orthogonal wavelet transform. Em: *Proceedings of International Conference on BioMedical Engineering (IASTED)*, Innsbruck, Austria.
- Lun, D. P. K., Shen, T. W., Hsung, T. C., Ho, D. K. C. (2012). Wavelet based speech presence probability estimator for speech enhancement. *Digital Signal Processing*, 22(6), 1161–1173.
- Mallat, S. (1989). A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11(7), 674–693.
- Mallat, S. G. (2008). *A Wavelet Tour of Signal Processing*, 3<sup>o</sup> edn. Academic Press.
- Mallat, S. G., Hwang, W. L. (1992). Singularity detection and processing with wavelets. *IEEE Transactions on Information Theory*, 38(2), 617–643.
- Mochimaru, F., Fujimoto, Y. (2002). Detecting the fetal electrocardiogram by wavelet theory-based methods. *Progress in Biomedical Research*, 7(3), 185–193.
- Montgomery, D. C. (2009). *Introduction to Statistical Quality Control*, 6<sup>o</sup> edn. John Wiley & Sons, Inc..
- Morettin, P. (1996). From fourier to wavelet analysis of time series. Em: Prat, A. (ed) *COMPSTAT*, Physica-Verlag HD, pp. 111–122.
- Morettin, P. A. (1997). Wavelets in statistics.
- Morettin, P. A. (1999). *Ondas e Ondaletas - Da Análise de Fourier à Análise de Ondaletas*. Editora da USP.
- Müller, P., Vidakovic, B. (1998). Bayesian inference with wavelets: Density estimation. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 7(4), 456–468.
- Nason, G. P. (2011). *Wavelet Methods in Statistics with R*. Springer.
- Nason, G. P. (2013). *wavethresh: Wavelets statistics and transforms*. URL <http://CRAN.R-project.org/package=wavethresh>, R package version 4.6.6.
- Nason, G. P., Silverman, B. W. (2000). *Wavelets for Regression and Other Statistical Problems*, John Wiley & Sons, pp. 159–191.
- Nason, G. P., Von Sachs, R., Kroisandt, G. (2000). Wavelet processes and adaptive estimation of the evolutionary wavelet spectrum. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, 62(2), 271–292.
- Nelson, J., Kingsbury, N. (2012). Fractal dimension, wavelet shrinkage and anomaly detection for mine hunting. *IET Signal Processing*, 6(5), 484–493.
- Nielsen, O. (1998). Wavelets in scientific computing. Tese de Doutorado, Technical University of Denmark.
- Ogden, R., Lynch, J. (1999). Bayesian analysis of change-point models. Em: Müller, P., Vidakovic, B. (Eds) *Bayesian Inference in Wavelet-Based Models*, Lecture Notes in Statistics, vol 141, Springer New York, pp. 67–82.
- P., N. G., Silverman, B. W. (1994). The discrete wavelet transform in S. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 3(2), 163–191.
- Parrilli, S., Poderico, M., Angelino, C. V., Verdoliva, L. (2012). A Nonlocal SAR Image Denoising Algorithm Based on LLMMSE Wavelet Shrinkage. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 50(2), 606–616.
- Percival, D. B., Walden, A. T. (1999). *Wavelet Methods for Time Series Analysis*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Poornachandra, S. (2008). Wavelet-based denoising using subband dependent threshold for ECG signals. *Digital Signal Processing*, 18, 49–55.
- Priestley, M. B. (1996). Wavelets and time-dependent spectral analysis. *Journal of Time Series Analysis*, 17(1), 85–103.
- R Core Team (2013). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, URL <http://www.R-project.org/>.
- Remenyi, N., Vidakovic, B. (2013). Lambda-neighborhood wavelet shrinkage. *Computational Statistics & Data Analysis*, 57(1), 404–416.
- Reynaud-Bouret, P., Rivoirard, V., Tuleau-Malot, C. (2011). Adaptive density estimation: A curse of support? *Journal of Statistical Planning and Inference*, 141(1), 115–139.
- Salomon, D. (2000). *Data Compression: The Complete Reference*, vol 2. Springer.
- Shewhart, W. A. (1931). *Economic Control of Quality of Manufactured Product*. MacMillan, New York.

- Singer, A., Shkolnisky, Y., Nadler, B. (2009). Diffusion interpretation of nonlocal neighborhood filters for signal denoising. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 2(1), 118–139.
- Smith, C. B., Agaian, S., Akopian, D. (2008). A wavelet-denoising approach using polynomial threshold operators. *IEEE Signal Processing Letters*, 15, 906–909.
- Stein, C. (1981). Estimation of the mean of a multivariate normal distribution. *Annals of Statistics*, 9, 1135–1151.
- Swami, P. D., Jain, A., Singhai, J. (2009). A multilevel shrinkage approach for curvelet denoising. Em: *Proceedings of the International Conference on Information and Multimedia Technology*.
- Tapani, S., Kozakevicius, A. (2012). Wavelet change-point analysis for non-stationary time series. *Journal of Wavelet Theory and Applications*, 5(1), 29–44.
- Unser, M., Aldroubi, A., Laine, A. (2003). Guest editorial: Wavelets in medical imaging. *IEEE Transactions on Medical Imaging - Special Issue on Wavelets in Medical Imaging*, 22(3), 285–288.
- USC-SIPI (2013). The USC-SIPI image database. <http://sipi.usc.edu/database/>, University of Southern California, Signal and Image Processing Institute.
- Wang, Y. (1995). Jump and sharp cusp detection by wavelets. *Biometrika*, 82(2), 385–397.
- Xue, Y., Gençay, R., Fagan, S. (2014). Jump detection with wavelets for high-frequency financial time series. *Quantitative Finance, Preprint*, 1–18, <http://www.tandfonline.com/doi/pdf/10.1080/14697688.2013.830320>.