

Estudo dos Polígonos no plano de Argand-Gauss

Study of polygons in the Argand-Gauss plane

Felix Silva Costa e Robert Batista Pinheiro

Resumo

Neste trabalho, apresentamos a parte histórica dos números complexos, mostrando o seu surgimento e sua evolução ao longo dos tempos. Classificamos os triângulos no plano de Argand-Gauss, levando em consideração os seus vértices e discutimos alguns resultados envolvendo o cálculo de área para polígonos convexos, em especial, uma fórmula para determinarmos a área de polígonos cujos vértices correspondem as raízes de um número complexo.

Palavras-chave: Números Complexos. Triângulos. Polígonos. Áreas

Abstract

In this work, we present the historical part of the complex numbers, showing its emergence and its evolution over time. We classify the triangles in the Argand-Gauss plane, considering its vertices and we discuss some results involving the calculus of area to convex polygons, in particular, a formula to determine the area of polygons whose vertices correspond to the roots of a complex number.

Keywords: Complex number. Triangles. Polygons. Areas

1 Introdução

Apesar do seu pouco aparecimento no ensino médio, os números complexos emergem naturalmente em diversas aplicações do mundo real. Eles possuem grande relevância em inúmeras áreas, principalmente nas engenharias, aparecem em grandezas como a impedância e a potência aparente, que são expressas por um número complexo. Já na aerodinâmica foi desenvolvida uma curva fechada no plano complexo que representa o perfil de uma asa de avião. Citamos também, uma aplicação na física, mais precisamente na óptica, onde determinamos a direção de um raio de luz refletido num espelho plano.¹

Segundo Jucimar Peruzzo², foi a partir do estudo das equações algébricas do 3º grau que se conseguiu um melhor entendimento da estrutura dos números complexos ou imaginários. Descobriu-se que o campo dos números reais é insuficiente para o estudo da álgebra, sendo indispensável trabalhar-se também com os números imaginários. Isso ficou bastante visível quanto à questão de resolução de equações. Os números complexos são uma das tantas abstrações matemáticas que facilitam o cálculo e a resolução de muitos problemas.

Neste artigo, fruto da dissertação Pinheiro (2012) de mestrado profissional em Matemática, em rede nacional, PROFMAT-MA, é discutido algumas propriedades dos polígonos convexos no plano de Argand-Gauss, apresentando uma expressão para calcular a área de um polígono convexo, em especial, obtemos uma fórmula para determinar a área de um polígono convexo regular, cujos vértices correspondem as raízes n -ésimas de um número complexo.

O trabalho está dividido da seguinte forma:

¹Sistema óptico de espelhos constituído por superfícies planas e polidas, capazes de refletir regularmente a luz.

²Professor da E.E.B. Dom Felício César da Cunha Vasconcelos e E.E.B. Isabel da Silva Telles em, Irani, Santa Catarina.

a seção 2 apresenta um breve contexto histórico sobre os números complexos, apresentando desde a sua origem até a evolução de sua representação; seção 3 apresenta a condição de alinhamento de três pontos no plano de Argand-Gauss; a seção 4 usa essa relação para classificar um triângulo formado nesse plano, a seção 5 calculamos a área de um triângulo nesse plano e finalmente a seção 6 apresenta uma fórmula para o cálculo da área de um polígono convexo, em especial, uma fórmula para calcular a área de um polígono regular em que os vértices são as raízes n -ésimas de um número complexo.

2 Um pouco da história dos números complexos

De acordo com Hellmeister (2004); Pinto (2009), uma das motivações principais do surgimento dos números complexos não foi à resolução de equações do 2º grau cujas soluções são expressas por raízes quadradas de números negativos. O surgimento desses números está ligado diretamente à resolução de equações algébricas do 3º grau. Até aquele momento, as equações do 2º grau que apresentavam raízes quadradas de números negativos eram consideradas sem resolução e o objetivo dos matemáticos da época era desenvolver uma fórmula de resolução de equações cúbicas através de radicais, semelhante à que se usava para resolver as equações quadráticas.

Por volta de 1510, o matemático italiano Scipione Del Ferro (1465-1526) desenvolveu uma fórmula para um caso especial de cúbicas, ele desenvolveu uma resolução para equações do tipo

$$x^3 + px + q = 0.$$

Entretanto Scipione faleceu sem publicar seus resultados, divulgando-os apenas para um pequeno grupo de pessoas dentre eles Antônio Maria Del Fiore. De posse desse resultado Fiore tentou ganhar seu espaço entre os ma-

temáticos e no ano de 1535 desafiou Nicolau Fontana (1500-1557), conhecido como Tartágia, para um duelo de resolução de problemas (o que era comum naquela época). O desafio consistia na resolução de trinta problemas para cada, propostos pelo oponente, cabia ao perdedor pagar trinta banquetes. Tartágia estava começando a se destacar no cenário matemático da época e prontamente aceitou o desafio. Todos os problemas propostos por Fior para Tartágia recaíam no caso particular da cúbica cuja solução ele conhecia, Tartágia sabia que seu adversário conhecia tal solução, mas o que Fior não sabia era que no dia 10 de fevereiro de 1535 Tartágia também deduziu a fórmula e foi ainda mais longe deduzindo a fórmula para a equação do tipo

$$x^3 + px^2 + q = 0.$$

Tartágia venceu o desafio sem muito esforço, pois conseguiu resolver todos os problemas propostos por Fior, já seu adversário não conseguiu resolver nem a metade dos problemas impostos por Tartágia, e saiu humilhado do desafio. A vitória de Tartágia e sua descoberta ganham grande repercussão entre os matemáticos e ele recebe um convite de Girolamo Cardano (1501-1576) para ir a sua casa. Nessa época, Cardano gozava de boa posição em Milão e o convite era com o pretexto de apresentá-lo ao comandante militar da cidade, uma vez que Tartágia tinha feito também grandes descobertas sobre tiros e fortificações, a intenção de Cardano era ganhar a autorização de Tartágia para publicar a resolução da equação em seu livro *Practica Arithmetica* (1539). A princípio Tartágia não revela a fórmula, mas depois de muita insistência Cardano conseguiu a fórmula com a promessa de que não publicaria, pois o próprio Tartágia queria publicar e só estava esperando o momento exato para isso. Porém Tartágia tinha revelado o segredo na forma de um poema cifrado e Cardano não conseguiu decifrar. Depois de mais promessas por parte de Cardano, Tartágia revela a fórmula

sem códigos, entretanto Cardano não cumpre a promessa e, em 1545, publica a fórmula de Tartágia no seu livro *Ars Magna*.

A solução da equação cúbica do tipo $x^3 + px + q = 0$ se dava através da fórmula

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

conhecida hoje como fórmula de Cardano. Essa fórmula só se aplicava quando

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \geq 0,$$

pois isso garantia a existência da raiz evitando assim a mesma situação das equações do 2º grau com raízes quadradas de números negativos.

Nessa mesma época o matemático italiano Rafael Bombelli (1526-1573) em seu livro *L'Álgebra Parte Maggiore Dell' Arithmetica* fez um estudo sobre a resolução de equações de grau inferior a quatro e resolvendo a equação $x^3 - 15x = 4$ verificou por inspeção que $x = 4$ era solução da equação, pois $4^3 - 15 \cdot 4 = 4$ mas, tentando verificar se encontrava a mesma solução $x = 4$, pela fórmula de Cardano- Tartágia obteve:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{\frac{4}{2} + \sqrt{\frac{16}{4} - \frac{3375}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{4}{2} - \sqrt{\frac{16}{4} - \frac{3375}{27}}} = \\ &= \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}. \end{aligned}$$

Com esse resultado, Bombelli chegou a um impasse pois $\sqrt{-121}$ não existia. Logo, a equação não teria solução, mas $x = 4$ era uma solução da equação pois satisfazia a igualdade. Somente em 1572 ele resolveu o impasse, partindo da hipótese que existiam expressões das formas $a + \sqrt{-b}$ e $a - \sqrt{-b}$ que seriam as formas simplificadas de, respectivamente, $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$ e $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ tal que

$$(a + \sqrt{-b}) + (a - \sqrt{-b}) = 4$$

concluindo assim que $a = 2$. Faltava então determinar o valor de b , voltando a equação

ele deduziu:

$$2 + \sqrt{-b} = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = \sqrt[3]{2 + \sqrt{121} \cdot \sqrt{-1}} = \sqrt[3]{2 + 11 \cdot \sqrt{-1}}.$$

Elevando ambos os membros ao cubo, chegou na seguinte relação:

$$(8 - 6b) + (12 - b)\sqrt{-b} = 2 + 11\sqrt{-1}.$$

Por comparação concluiu que $b = 1$. Assim:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} &= 2 + \sqrt{-1} \text{ e} \\ \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} &= 2 - \sqrt{-1}. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} \\ &= 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4. \end{aligned}$$

Bambelli também criou as regras da multiplicação para operar com $\sqrt{-1}$, ou seja:

$$\begin{aligned} (\sqrt{-1}) \cdot (\sqrt{-1}) &= -1 \\ (-\sqrt{-1}) \cdot (\sqrt{-1}) &= 1 \\ (-\sqrt{-1}) \cdot (-\sqrt{-1}) &= -1 \\ (\pm 1)(\sqrt{-1}) &= \pm\sqrt{-1} \\ (\pm 1)(\pm\sqrt{-1}) &= \pm\sqrt{-1} \end{aligned}$$

Além dessa regra da multiplicação também criou a regra para somar dois números da forma $x + y\sqrt{-1}$, $x, y \in \mathbb{R}$, ou seja:

$$\begin{aligned} (x_1 + y_1\sqrt{-1}) + (x_2 + y_2\sqrt{-1}) &= \\ = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\sqrt{-1}. \end{aligned}$$

É importante ressaltar que a notação $\sqrt{-1}$ só foi introduzida no ano de 1629 por Albert Girard (1595-1632) em seu livro *L'Invention Nouvelle en Algebre*, até então a simbologia para $\sqrt{-1}$ era da forma $R[0 \ m.1]$ (R de raiz, m de menos) usada por Bombelli. Já os termos real e imaginário foram introduzidos em 1637

por René Descartes (1596-1650); em 1777 Leonhard Euler (1707-1783) introduziu o símbolo i para denotar $\sqrt{-1}$ sendo aceito plenamente somente no ano de 1801 quando Friederich Gauss (1777-1855) começou a usar de forma contínua essa notação. Também foi Gauss que introduziu a expressão “números complexos” e coube a Willian Rowan Hamilton (1805-1865) a introduzir a notação $a + bi$ para um número complexo, essa expressão é denominada nos dias de hoje como forma algébrica de um número complexo.

No campo geométrico o desenvolvimento aconteceu a partir do ano de 1800 quando Jean Robert Argand (1768-1822) e Gauss chegaram a conclusão que os números complexos poderiam ser representados em um sistema de coordenadas retangulares e para isso eles convencionaram que o eixo horizontal representaria os números reais, o eixo vertical representaria os números imaginários e qualquer complexo poderia ser representado na forma de par ordenado, isto é, $a + bi$ corresponderia ao par (a, b) . Com essas conversões um complexo $a + bi$ representaria geometricamente um ponto nesse plano bidimensional que hoje é denominado de plano de Argand-Gauss.

3 Condição de alinhamento de três complexos

Dados os complexos z_1, z_2 e z_3 tais que $f(z_1) = P$, $f(z_2) = Q$ e $f(z_3) = R$, com $P, Q, R \in \mathbb{R}^2$, a condição para que esses três pontos estejam alinhados Viggiani (1968) é que exista $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que $z_3 - z_1 = \lambda(z_2 - z_1)$. Sendo $z_2 \neq z_1$,

$$\lambda = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Lembrando que se z é real, então $z = \bar{z}$, obtemos:

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \overline{\left(\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \right)} = \frac{\bar{z}_3 - \bar{z}_1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}.$$

Daí, segue que:

$$(z_3 - z_1) \cdot (\bar{z}_2 - \bar{z}_1) - (z_2 - z_1) \cdot (\bar{z}_3 - \bar{z}_1) = 0.$$

Desenvolvendo,

$$z_2\bar{z}_3 + z_1\bar{z}_2 + z_3\bar{z}_1 - (z_1\bar{z}_3 + z_3\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1) = 0$$

$$\iff \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 & \bar{z}_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Logo,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 & \bar{z}_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (1)$$

É a condição necessária e suficiente para que z_1, z_2 e z_3 sejam colineares.

4 Classificação dos triângulos

Na relação $\lambda = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$, se $\lambda \in \mathbb{R}$ então z_1, z_2 e z_3 são colineares, caso contrário os seus afijos são vértices de um triângulo Viggiani (1968).

Seja o complexo $d = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$ denominado de relação simples de três complexos, onde $|d| = \frac{|z_3 - z_1|}{|z_2 - z_1|}$ e $\arg(d) = \theta$, onde o ângulo θ é formado pelos lados $\overline{z_1 z_2}$ e $\overline{z_1 z_3}$ ³.

Observamos que $\arg(d) = \arg\left(\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right) = \arg(z_3 - z_1) - \arg(z_2 - z_1)$. Sendo $\arg(z_3 - z_1)$, $\arg(z_2 - z_1)$ os ângulos dos vetores $z_3 - z_1$, $z_2 - z_1$, então $\arg(z_3 - z_1) = \arg(z_2 - z_1) + \theta$.

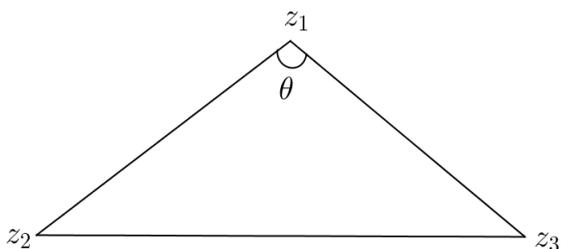


Figura 1: Triângulo 1

³Se optássemos por trabalhar com o ângulo formado pelos lados $\overline{z_2 z_3}$ e $\overline{z_2 z_1}$ a relação seria $d = \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2}$.

Analisando o triângulo da Figura 1 conforme a relação $d = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$:

1. Se $|d| = 1 \implies |z_3 - z_1| = |z_2 - z_1| \implies \Delta z_1 z_2 z_3$ é isósceles;
2. Se d for imaginário puro, então $\cos \theta = 0$. De fato, como $\cos \theta = \frac{a}{|d|}$ e d é imaginário puro, então $a = 0$, uma vez que a é a parte real de d . Dessa forma, $\theta = \frac{\pi}{2} \text{rad}$ e, conseqüentemente, $\Delta z_1 z_2 z_3$ é retângulo em z_1 ;
3. Se d for real, temos a condição de alinhamento e, em consequência, os afijos z_1, z_2 e z_3 não formam um triângulo.

4. Se $d = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, temos que $|d| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$, conseqüentemente

$$|z_3 - z_1| = |z_2 - z_1| \text{ e } \theta = \frac{\pi}{3} \text{rad}.$$

Dessa forma, $\Delta z_1 z_2 z_3$ é equilátero.

Portanto, classificamos um triângulo no plano de Argand-Gauss, de acordo com a variável d . Aqui, a referência utilizada neste capítulo.

5 Área do triângulo

Após classificar os triângulos, vamos determinar a área de um triângulo qualquer, levando em consideração os seus vértices.

Seja o triângulo $z_1 z_2 z_3$ e N_r , $r = 1, 2, 3$, a projeção de qualquer ponto de z_r sobre o eixo Ox . Dessa forma, temos:

$$\begin{aligned} A(\Delta P_1 P_2 P_3) &= \\ &= A(P_1 P_2 N_1 N_2) + A(P_1 P_3 N_3 N_1) - A(P_2 N_2 N_3 P_3) \\ &= \frac{1}{2}(P_2 N_2 + P_1 N_1)N_2 N_1 + \\ &+ \frac{1}{2}(P_1 N_1 + P_3 N_3)N_1 N_3 - \frac{1}{2}(P_2 N_2 + P_3 N_3)N_2 N_3 \\ &= \frac{1}{2}(y_2 + y_1)(x_1 - x_2) + \frac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) + \\ &- \frac{1}{2}(y_2 + y_3)(x_3 - x_2) \\ &= \frac{1}{2}[(x_1 y_2 - y_1 x_2) + (x_2 y_3 - y_2 x_3) + (x_3 y_1 - y_3 x_1)], \end{aligned}$$

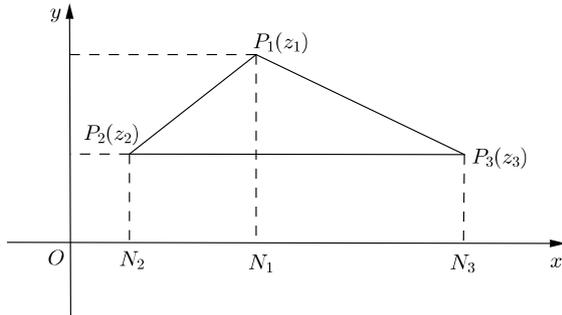


Figura 2: Triângulo 2.

onde $P_1P_2N_1N_2, P_1P_3N_3N_1, P_2N_2N_3P_3$ representam trapézios. Observando que,

$$\begin{aligned} i) x_1y_2 - y_1x_2 &= \\ &= \text{Im} [(x_1 - iy_1)(x_2 + iy_2)] \\ &= \text{Im}(\bar{z}_1z_2) = \frac{1}{2}i(z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2); \\ ii) x_2y_3 - y_2x_3 &= \\ &= \text{Im} [(x_2 - iy_2)(x_3 + iy_3)] \\ &= \text{Im}(\bar{z}_2z_3) = \frac{1}{2}i(z_2\bar{z}_3 - \bar{z}_2z_3); \\ iii) x_3y_1 - y_3x_1 &= \\ &= \text{Im} [(x_3 - iy_3)(x_1 + iy_1)] \\ &= \text{Im}(\bar{z}_3z_1) = \frac{1}{2}i(z_3\bar{z}_1 - \bar{z}_3z_1), \end{aligned}$$

então:

$$\begin{aligned} A(\Delta P_1P_2P_3) &= \\ &= \frac{i}{4} (z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2 + z_2\bar{z}_3 - \bar{z}_2z_3 + z_3\bar{z}_1 - \bar{z}_3z_1) \\ &= \frac{i}{4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 & \bar{z}_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Este determinante é puramente imaginário, já que

$$\frac{i}{4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 & \bar{z}_3 \end{vmatrix} \text{ é real positivo ou negativo,}$$

caso seja negativo devemos tomar seu módulo.

O determinante acima pode ser reescrito como

$$\left| \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 \end{vmatrix} \right| + \left| \begin{vmatrix} z_2 & z_3 \\ \bar{z}_2 & \bar{z}_3 \end{vmatrix} \right| + \left| \begin{vmatrix} z_3 & z_1 \\ \bar{z}_3 & \bar{z}_1 \end{vmatrix} \right|, \text{ para isso}$$

basta aplicar o teorema de Laplace na primeira linha, ou seja:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 & \bar{z}_3 \end{vmatrix} &= a_{11}.A_{11} + a_{12}.A_{12} + a_{13}.A_{13} = \\ &= \begin{vmatrix} z_2 & z_3 \\ \bar{z}_2 & \bar{z}_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} z_1 & z_3 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

onde A_{ij} é o cofator do elemento $a_{ij}, i, j = 1, 2, 3,$

da matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 & \bar{z}_3 \end{pmatrix}.$

Como $\begin{vmatrix} z_1 & z_3 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} z_3 & z_1 \\ \bar{z}_3 & \bar{z}_1 \end{vmatrix},$ então:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 & \bar{z}_3 \end{vmatrix} &= \\ &= \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_2 & z_3 \\ \bar{z}_2 & \bar{z}_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_3 & z_1 \\ \bar{z}_3 & \bar{z}_1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Logo, a área do triângulo $\Delta P_1P_2P_3$ também pode ser dada pela expressão:

$$\begin{aligned} A(\Delta P_1P_2P_3) &= \\ &= \frac{i}{4} \left(\begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_2 & z_3 \\ \bar{z}_2 & \bar{z}_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_3 & z_1 \\ \bar{z}_3 & \bar{z}_1 \end{vmatrix} \right). \end{aligned} \tag{2}$$

6 Área de um polígono convexo

A partir de (2), vamos determinar uma fórmula para o cálculo da área de um polígono convexo formado por n pontos, baseado em Costa (2008), que apresenta uma demonstração detalhada no caso dos vértices do polígono pertencerem ao plano \mathbb{R}^2 . Entretanto, devemos lembrar que a área de um polígono convexo é igual à soma das áreas de uma decomposição do polígono em triângulos. Consideramos um polígono convexo P de n lados e de pontos $P_1, P_2, \dots, P_n,$ percorridos no sentido anti-horário, $A_{\text{polígono}} = A_{P_1P_2P_3} + A_{P_1P_3P_4} + \dots + A_{P_1P_{n-1}P_n},$ onde $A_{P_1P_kP_{k+1}}$ é a área do k -ésimo triângulo,

$$A_{P_1 P_k P_{k+1}} = \frac{i}{4} \left(\left| \begin{array}{cc} z_1 & z_k \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_k \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} z_k & z_{k+1} \\ \bar{z}_k & \bar{z}_{k+1} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} z_{k+1} & z_1 \\ \bar{z}_{k+1} & \bar{z}_1 \end{array} \right| \right). \quad (3)$$

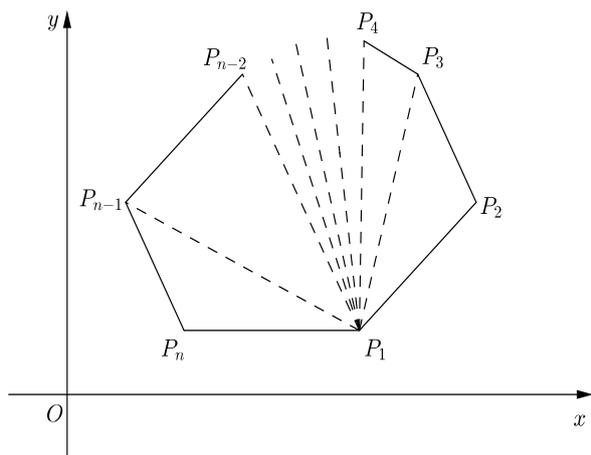


Figura 3: Polígono convexo no plano de Argand-Gauss.

Então da equação (3), temos:

$$A_{\text{polígono}} = \frac{i}{4} \left(\left| \begin{array}{cc} z_1 & z_2 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} z_2 & z_3 \\ \bar{z}_2 & \bar{z}_3 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} z_3 & z_1 \\ \bar{z}_3 & \bar{z}_1 \end{array} \right| \right) + \frac{i}{4} \left(\left| \begin{array}{cc} z_1 & z_3 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_3 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} z_3 & z_4 \\ \bar{z}_3 & \bar{z}_4 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} z_4 & z_1 \\ \bar{z}_4 & \bar{z}_1 \end{array} \right| \right) + \frac{i}{4} \left(\left| \begin{array}{cc} z_1 & z_4 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_4 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} z_4 & z_5 \\ \bar{z}_4 & \bar{z}_5 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} z_5 & z_1 \\ \bar{z}_5 & \bar{z}_1 \end{array} \right| \right) + \dots + \frac{i}{4} \left(\left| \begin{array}{cc} z_1 & z_{n-1} \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_{n-1} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} z_{n-1} & z_n \\ \bar{z}_{n-1} & \bar{z}_n \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} z_n & z_1 \\ \bar{z}_n & \bar{z}_1 \end{array} \right| \right). \quad (4)$$

Observamos na equação (4) que o último determinante de $A_{P_1 P_k P_{k+1}}$ se anula com o primeiro determinante de $A_{P_1 P_{k+1} P_{k+2}}$. Logo,

$$A_{\text{polígono}} = \frac{i}{4} \left(\left| \begin{array}{cc} z_1 & z_2 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} z_2 & z_3 \\ \bar{z}_2 & \bar{z}_3 \end{array} \right| + \dots + \left| \begin{array}{cc} z_n & z_1 \\ \bar{z}_n & \bar{z}_1 \end{array} \right| \right)$$

6.1 Caso particular

Já sabemos que as raízes n -ésimas de $z \neq 0$ representam geometricamente os vértices de um polígono regular de n lados. Representando essas raízes por w_0, w_2, \dots, w_{n-1} , a área desse polígono formado pelos afixos dessas raízes é dada pela expressão.

$$A_{\text{polígono}} = \frac{i}{4} \left(\left| \begin{array}{cc} w_0 & w_1 \\ \bar{w}_0 & \bar{w}_1 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} w_1 & w_2 \\ \bar{w}_1 & \bar{w}_2 \end{array} \right| + \dots + \left| \begin{array}{cc} w_{n-1} & w_0 \\ \bar{w}_{n-1} & \bar{w}_0 \end{array} \right| \right). \quad (5)$$

Vimos que (5) determina a área do polígono regular formado pelas raízes n -ésimas de um complexo $a + bi$, então será que seria possível chegar a uma equação que determina essa mesma área sem ter que calcular essas raízes? Isto é, seria possível determinar uma fórmula que calcula essa área que dependa apenas de a , b e n ? Vejamos:

Sabemos que a raiz n -ésima de um número complexo z é dada por Capelas de Oliveira (2006):

$$w_k = \rho \left[\cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right] \quad (6)$$

onde, $k = 0, 1, \dots, n-1$, $\rho = \sqrt[n]{|z|} = \sqrt[n]{a^2 + b^2}$, $\theta = \arctg \left(\frac{b}{a} \right)$. Usando a equação (6), determinamos o k -ésimo determinante da equação (5),

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{cc} w_{k-1} & w_k \\ \bar{w}_{k-1} & \bar{w}_k \end{array} \right| &= \\ &= \rho^2 \left| \begin{array}{cc} 1 & i \\ 1 & -i \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} \cos \left(\frac{\theta + 2(k-1)\pi}{n} \right) & \cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \\ \sin \left(\frac{\theta + 2(k-1)\pi}{n} \right) & \sin \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \end{array} \right| \\ &= -2i\rho^2 \left[\sin \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \cos \left(\frac{\theta + 2(k-1)\pi}{n} \right) + \right. \\ &\quad \left. - \sin \left(\frac{\theta + 2(k-1)\pi}{n} \right) \cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right] \\ &= -2i\rho^2 \sin \left(\frac{2\pi}{n} \right). \quad (7) \end{aligned}$$

Portanto, como o resultado obtido na equação (7) independe do k , os demais determinantes da equação (6) possuem o mesmo resultado. Além disso, como temos n determinantes, então multiplicamos o valor da equação (7) por

n , para obtermos a área do polígono. Ou seja, a área do polígono é:

$$\begin{aligned} A_{\text{polígono}} &= n \frac{i}{4} \left[-2i\rho^2 \text{sen} \left(\frac{2\pi}{n} \right) \right] \\ &= \frac{n\rho^2}{2} \text{sen} \left(\frac{2\pi}{n} \right) \\ &= \frac{n \sqrt[n]{a^2 + b^2} \text{sen} \left(\frac{2\pi}{n} \right)}{2} \end{aligned}$$

Outra forma de calcularmos esta expressão é: seja $w_0, w_1, w_2 \dots w_{n-1}$ as raízes n -ésimas de $z = a + bi$ e seja l a medida do lado do polígono regular formado por essas raízes, então:

$$\begin{aligned} |w_1 - w_0| &= |w_2 - w_1| = \dots \\ &= |w_k - w_{k-1}| = \dots = |w_{n-1} - w_0| = l. \end{aligned}$$

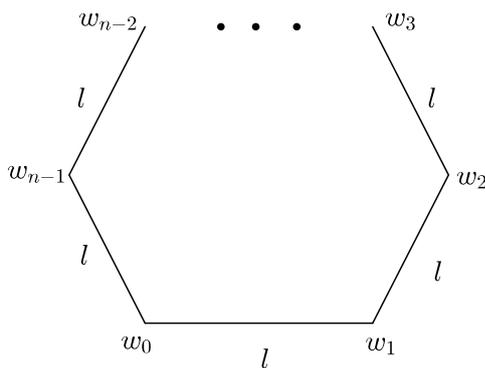


Figura 4: Polígono regular formado pelas raízes n -ésimas.

Logo, $l = |w_k - w_{k-1}|$. Como o valor de w_k é dado por

$$w_k = \rho \left[\cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \text{sen} \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right]$$

e o valor de w_{k-1} é dado por

$$\begin{aligned} w_{k-1} &= \\ &= \rho \left[\cos \left(\frac{\theta + 2k\pi - 2\pi}{n} \right) + i \text{sen} \left(\frac{\theta + 2k\pi - 2\pi}{n} \right) \right], \end{aligned}$$

onde $\rho = \sqrt[n]{|z|} = \sqrt[n]{a^2 + b^2}$, $\theta = \text{arctg} \left(\frac{b}{a} \right)$ e $k \in \mathbb{Z}$, fazendo $w_k - w_{k-1}$, obtemos:

$$w_k - w_{k-1} =$$

$$\begin{aligned} &= \rho \left[\cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) - \cos \left(\frac{\theta + 2k\pi - 2\pi}{n} \right) \right] + \\ &+ i\rho \left[\text{sen} \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) - \text{sen} \left(\frac{\theta + 2k\pi - 2\pi}{n} \right) \right] \\ &= \rho \left[-2\text{sen} \left(\frac{2\theta + 4k\pi - 2\pi}{2n} \right) \text{sen} \left(\frac{\pi}{n} \right) + \right. \\ &+ 2i \text{sen} \left(\frac{\pi}{n} \right) \cos \left(\frac{2\theta + 4k\pi - 2\pi}{2n} \right) \left. \right] \\ &= 2\rho \text{sen} \left(\frac{\pi}{n} \right) \left[-\text{sen} \left(\frac{2\theta + 4k\pi - 2\pi}{2n} \right) + \right. \\ &+ i \cos \left(\frac{2\theta + 4k\pi - 2\pi}{2n} \right) \left. \right]. \end{aligned}$$

Aplicando o módulo,

$$\begin{aligned} |w_k - w_{k-1}| &= \\ &= 2\rho \text{sen} \left(\frac{\pi}{n} \right) \sqrt{\text{sen}^2 \left(\frac{2\theta + 4k\pi - 2\pi}{2n} \right) + \cos^2 \left(\frac{2\theta + 4k\pi - 2\pi}{2n} \right)} \\ &= 2\rho \text{sen} \left(\frac{\pi}{n} \right). \end{aligned}$$

Logo, o lado do polígono é

$$l = 2\rho \text{sen} \left(\frac{\pi}{n} \right) = 2 \sqrt[n]{a^2 + b^2} \text{sen} \left(\frac{\pi}{n} \right).$$

O polígono pode ser dividido em n triângulos com centro numa circunferência circunscrita como um vértice comum a todos esses n triângulos.

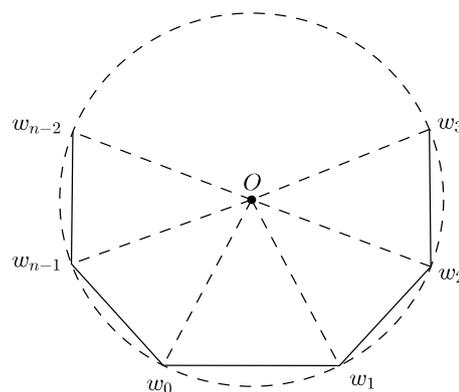


Figura 5: Polígono associado às raízes n -ésimas de um complexo, inscrito numa circunferência

Definindo ρ como a medida do raio dessa circunferência circunscrita, então vamos calcular a área de um desses triângulos.

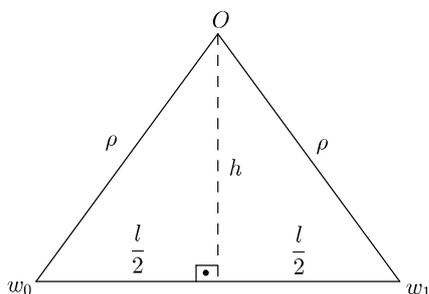


Figura 6: Triângulo 3.

Portanto,

$$\begin{aligned} \rho^2 &= h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \\ \Rightarrow h &= \sqrt{\rho^2 - \frac{l^2}{4}} = \sqrt{\rho^2 - \frac{4\rho^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}{4}} = \\ &= \sqrt{\rho^2 - \rho^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{n}\right)} \\ &= \rho \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{n}\right)} = \rho \sqrt{\operatorname{cos}^2\left(\frac{\pi}{n}\right)} = \rho \operatorname{cos}\left(\frac{\pi}{n}\right). \end{aligned}$$

Logo, a área do triângulo será:

$$A_T = \frac{hl}{2} = \frac{\rho \operatorname{cos}\left(\frac{\pi}{n}\right) 2\rho \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)}{2}.$$

Como o polígono foi dividido em n triângulos iguais, então:

$$\begin{aligned} A_{\text{polígono}} &= nA_T = n \frac{\rho^2 \left[2 \operatorname{cos}\left(\frac{\pi}{n}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)\right]}{2} \\ &= n \frac{\rho^2 \left[\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right]}{2}. \end{aligned}$$

Segue que, a área do polígono regular será:

$$A_{\text{polígono}} = \frac{n \sqrt{a^2 + b^2} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{2}. \quad (8)$$

Se reescrevermos a equação (8), da forma:

$$A_{\text{polígono}} = \pi \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\frac{2\pi}{n}} \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (9)$$

Observe ainda que usando o conceito de limite na equação (9), que a área do polígono vale π ,

quando n tende infinito. Basta usarmos a propriedade do limite fundamental trigonométrico e o limite da raiz n -ésima de um número, onde ambos valem 1, com $n \rightarrow \infty$. Portanto, concluímos que a medida que n cresce o polígono formado pelos vértices das raízes n -ésimas do número complexo, se aproxima de um círculo unitário, com centro na origem.

7 Conclusões

A forma como os números complexos surgem na matemática e sua gama de aplicações, sejam elas físicas ou de qualquer outra natureza, mostra o quanto eles são imprescindíveis e ao mesmo tempo fascinantes. Além de mostrarmos seu aparecimento e evolução, estabelecemos uma importante conexão entre os números complexos com outros tópicos do ensino médio, tais como trigonometria e geometria plana. Discutimos alguns resultados para polígonos convexos, em particular, os regulares formados a partir das raízes de um número complexo, no plano Argand-Gauss, mais propriamente, uma relação para o cálculo de área de polígonos convexos através dos números complexos. Destacamos ainda, que este trabalho é resultado da dissertação de mestrado do programa de Mestrado Profissional em Matemática, PROFMAT-MA, como dito em seção anterior, que tem como objetivo primordial, mostrar a diversidade dos números complexos para os alunos e professores do ensino médio, ou seja, mostrar que os números complexos não estão isolados de outros conteúdos da matemática.

Agradecimentos

Agradecemos ao Dr. J. A. P. Ferreira Marão pelas diversas discussões e sugestões.

Referências

- Capelas de Oliveira, E. e Rodrigues Jr., W. A., 2006. Funções analíticas com aplicações. Livraria da Física.
- Costa, F. S., 2008. Áreas e contornos. Dissertação de Mestrado, IMECC-UNICAMP.
- Hellmeister, A. C. P. e Peixoto, C. M., 2004. Matemática: Ensino Médio. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica.
- Pinheiro, R. B., 2012. Números complexos: alguns aspectos algébricos e geométricos. Dissertação de Mestrado, UFMA.
- Pinto, U. J., 2009. A história dos números complexos: das quantidades. Dissertação de Mestrado, UFRJ.
- Viggiani, D., 1968. Alguns aspectos da aplicação dos números complexos a geometria. Tese de Doutorado, UNIMAR.