

## Frequências e autofunções do sistema de duas cordas acopladas

### Frequencies and eigenfunctions of coupled double-strings system

Vinicius Weide Rodrigues<sup>\*1</sup>, Rosemaira Dalcin Copetti<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, RS, Brasil

<sup>2</sup>Professor Associado, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Departamento de Matemática, Universidade Federal de Santa Maria, RS, Brasil

#### Resumo

*Neste trabalho, é considerado um sistema formado por duas cordas paralelas, bi-apoiadas sujeitas a uma tensão constante e anexadas por uma camada viscoelástica. O deslocamento transversal do modelo é descrito por duas equações diferenciais parciais de segunda ordem acopladas devido ao termo viscoelástico. O sistema é resolvido através da metodologia que usa uma formulação matricial em blocos e a base dinâmica para determinar as frequências e as autofunções ou modos de vibração do problema.*

*Palavras-chave: Frequências naturais, autofunções, base dinâmica, sistema corda dupla, camada viscoelástica*

#### Abstract

*In this work is considered a system formed by two parallel strings, bi-supported, subject to a constant tension and connected by a viscoelastic layer. The transverse displacement of the model is described by two partial differential equations of second order coupled due to the viscoelastic term. The system is solved by the method which uses a block matrix formulation and the dynamic basis for determining the frequencies and the eigenfunctions or mode shapes of the problem.*

*Keywords: Natural frequencies, eigenfunction, dynamical basis, double-string system, layer viscoelastic*

\*viniciusweide@gmail.com

Recebido: 15/01/2014 Aceito: 08/04/2014

## 1 Introdução

Problemas envolvendo vibrações são assuntos importantes em diversas áreas, como engenharia, física e matemática, Meirovitch (1997), Chopra (1995). Sistemas envolvendo cordas, cabos e correntes, mesmo sendo sistemas mais simples, são constantemente utilizados em estruturas modernas de engenharia, aeronáutica, entre outras, ressaltando a importância de estudos envolvendo elementos deste tipo, De Dayan e Behar (1979), Ghayesh (2008), Krenk e Nielsen (2002). A análise das vibrações transversais de uma corda, embora seja um assunto recorrente em cursos de equações diferenciais, Rao (2009), Inman (2001), é tema de diversos trabalhos mais avançados, que envolvem, desde diferentes tipos de modelos, até diferentes técnicas de resolução de equações diferenciais, Xu et al. (1998), Tan e Ying (2000).

Em De Dayan e Behar (1979), um estudo sobre a qualidade de cordas de violão foi realizado escrevendo a solução através de uma soma infinita de senos e cossenos para uma corda dedilhada. A qualidade do som é investigada para cada tipo de componente usando a frequência correspondente a uma nota musical para cada corda. Krenk e Nielsen (2002) apresentaram o efeito de um amortecedor viscoso localizado próximo a extremidade de um cabo curto através da análise modal complexa. Já Leissa (1978) apresentou um método direto para analisar as vibrações de um sistema contínuo com amortecimento

O acoplamento de estruturas como cordas, vigas, cabos, é frequentemente usado em estruturas como pontes, prédios e edificações em geral. O estudo de sistemas desse tipo em termos de segurança e também estabilidade é importante não só em engenharia civil, mas também nas engenharias mecânica e aeronáutica, dentre outras, motivo pelo qual, existem vários estudos sobre esse tema, Foda (2013), Oniszczuk (2000a), Kelly (2011).

Kelly (2011) apresentou a resposta livre e forçada para um sistema com  $n$  estruturas elasticamente acopladas usando a ortogonalidade dos modos de vibração com operadores autoadjuntos em relação ao produto interno padrão. Um sistema com duas cordas elasticamente acopladas sob ação de uma força externa movendo-se a uma velocidade constante foi apresentado em Rusin et al. (2011), onde o autor considerou a forma adimensional do sistema e supôs uma solução em série de senos para o sistema desacoplado. Um sistema formado por duas cordas anexadas por uma camada elástica do tipo Winkler foi apresentado por Oniszczuk (2000a), que utilizou o método de Bernoulli-Fourier e obteve uma expressão para as frequências naturais e os modos de vibração do sistema livre. O sistema forçado foi resolvido utilizando-se a ortogonali-

dade entre os modos de vibração para diferentes tipos de forças externas, Oniszczuk (2000b). Em Oniszczuk (2003), o método de separação de variáveis e a expansão modal foi usada no modelo simplificado para o sistema viscoelástico de duas cordas anexadas obtendo expressões para o caso amortecido livre e com ação de forças externas.

A análise modal e a base dinâmica têm sido usadas no cálculo das frequências e modos de vibração de sistemas envolvendo tanto vigas do tipo Euler-Bernoulli como Timoshenko, Claeysen e Soder (2003). A base dinâmica é usada para escrever os modos de vibração do sistema, a partir dos quais é possível encontrar a resposta livre e forçada de sistemas discretos, concentrados e distribuídos, Claeysen et al. (2003).

Em Copetti et al. (2007), a análise modal, a base dinâmica gerada a partir da solução de uma equação diferencial de quarta ordem com condições iniciais impulsivas e uma formulação matricial em blocos são usadas para obter os modos de vibração e as frequências naturais de uma viga Euler-Bernoulli segmentada com amortecimento interno e amortecimento viscoso externo além de dispositivos tipo mola e amortecedor anexados nas seções da viga. Tsukazan (2005) considerou o problema de uma viga Euler-Bernoulli com seção transversal descontínua e usou a base dinâmica para encontrar os modos de vibração do sistema.

Em trabalhos mais recentes, Tolfo (2013) apresentou um estudo sobre o segundo espectro de frequências para o modelo matricial de uma viga Timoshenko bi-apoiada. Seibel (2013) determinou as frequências e modos de vibração de um sistema formado por duas vigas Euler-Bernoulli acopladas por uma camada viscoelástica e determinou as frequências e modos de vibração usando a base dinâmica, solução de uma equação diferencial de quarta ordem com condições impulsivas. Em Claeysen et al. (2012), os modos de vibração de um sistema composto por nanotubos de carbono acoplados através de forças de Van der Waals são escritos em termos da base dinâmica. Já em Claeysen et al. (2013) a resposta forçada para um nanotubo de carbono de uma única camada é avaliada usando a resposta impulso fundamental.

Neste trabalho, é considerado um sistema formado por duas cordas paralelas, de mesmo comprimento, bi-apoiadas sujeitas a uma tensão constante e anexadas por uma camada viscoelástica. As frequências e os modos de vibração do problema são obtidos usando uma formulação matricial em blocos e a base dinâmica é usada para determinar a solução de uma equação diferencial de segunda ordem.

## 2 Descrição do Modelo

Considere um sistema composto por duas cordas bi-apoiadas de mesmo comprimento  $L$ , anexadas por um elemento viscoelástico e esticadas a uma tensão constante, conforme a Figura 1.

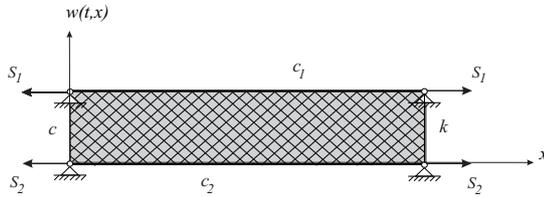


Figura 1: Duas cordas anexadas viscoelasticamente

As equações que modelam esse sistema são dadas abaixo, Oniszczyk (2003)

$$\begin{aligned}
 m_1 \ddot{w}_1 + c_1 \dot{w}_1 + c(\dot{w}_1 - \dot{w}_2) - S_1 w_1'' + k(w_1 - w_2) &= 0, \\
 m_2 \ddot{w}_2 + c_2 \dot{w}_2 + c(\dot{w}_2 - \dot{w}_1) - S_2 w_2'' + k(w_2 - w_1) &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

onde,

$$\dot{w}_i = \frac{\partial w_i}{\partial t}, \quad \ddot{w}_i = \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2}, \quad w_i'' = \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2}, \tag{2}$$

e,

- $t, x$  são as coordenadas temporal e espacial, respectivamente;
- $k$  é a constante de rigidez do elemento elástico;
- $S_i$  é a tensão da corda  $i, i = 1, 2$ ;
- $m_i = \rho_i A_i$ , sendo que  $\rho_i$  é a massa específica da corda  $i$  e  $A_i$  é a área da seção transversal, para  $i = 1, 2$ ;
- $c_i$  é o amortecimento na corda  $i, i = 1, 2$ ;
- $c$  é o amortecimento na camada elástica.

As condições iniciais desse sistema são dadas de forma geral por

$$w_i(0, x) = w_{i0}(x), \quad \frac{\partial w_i}{\partial t}(0, x) = v_{i0}(x), \quad i = 1, 2, \tag{3}$$

e as condições de contorno, para o sistema bi-apoiado, são da forma

$$w_i(t, 0) = w_i(t, L) = 0. \tag{4}$$

Para determinar as vibrações livres amortecidas do sistema (1), considera-se, primeiramente, o sistema em sua forma matricial, dado por

$$M\ddot{\mathbf{w}} + C\dot{\mathbf{w}} + (K_o + K_k)\mathbf{w} = \mathbf{0}, \tag{5}$$

onde,

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} \end{bmatrix}, \tag{6}$$

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c + c_1 & -c \\ -c & c + c_2 \end{bmatrix}, \tag{7}$$

$$K_k = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}, \tag{8}$$

$K_o$  é um operador espacial matricial de segunda ordem, dado por

$$K_o = \begin{bmatrix} -S_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 \\ 0 & -S_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{bmatrix}, \tag{9}$$

e,  $\mathbf{0}$  é o vetor nulo de ordem  $(2 \times 1)$ . Seja,

$$\mathbf{w}(t, x) = e^{\lambda t} \mathbf{X}(x), \tag{10}$$

uma solução para o sistema (5), onde,  $\lambda$  é o autovalor e  $\mathbf{X}(x)$  a autofunção correspondente.

Substituindo (10) em (5) obtém-se o problema de autovalor

$$(\lambda^2 M + \lambda C + (K_k + K_o))\mathbf{X}(x) = \mathbf{0}. \tag{11}$$

Desenvolvendo a equação acima a partir do operador matricial de segunda ordem  $K_o$ , obtém-se um sistema de equações diferenciais de segunda ordem envolvendo os modos de vibração ou autofunções do sistema,

$$K_S \mathbf{X}''(x) + [\lambda^2 M + \lambda C + K_k]\mathbf{X}(x) = \mathbf{0}, \tag{12}$$

onde,

$$K_S = \begin{bmatrix} -S_1 & 0 \\ 0 & -S_2 \end{bmatrix}, \tag{13}$$

com condições de contorno

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{X}(L) = \mathbf{0}. \tag{14}$$

## 3 Base fundamental

A solução do sistema (5) pode ser obtida escrevendo-se os modos  $\mathbf{X}(x)$  em função da base matricial fundamental, Claeysen et al. (1999).

$$\mathbf{h}(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{11} & \mathbf{h}_{12} \\ \mathbf{h}_{21} & \mathbf{h}_{22} \end{bmatrix}, \tag{15}$$

onde  $\mathbf{h}(x)$  é solução do problema

$$K_S \mathbf{h}'' + (\lambda^2 M + \lambda C + K_k)\mathbf{h} = \mathbf{0}; \tag{16}$$

$$\mathbf{h}(0) = \mathbf{0}, \quad K_S \mathbf{h}'(0) = \mathbf{I}, \tag{17}$$

e,  $I$  é a matriz identidade de ordem 2.

Assim,  $\mathbf{X}(x)$  pode ser escrito como combinação linear dos elementos dessa base, isto é, existem vetores constantes  $\mathbf{c}_1$  e  $\mathbf{c}_2$ , tais que

$$\mathbf{X}(x) = \mathbf{h}(x)\mathbf{c}_1 + \mathbf{h}'(x)\mathbf{c}_2, \quad (18)$$

onde,

$$\mathbf{c}_i = [c_{i1} \quad c_{i2}]^T, \quad i = 1, 2. \quad (19)$$

As condições gerais de contorno podem ser escritas da seguinte forma,

$$\begin{aligned} A_{11}\mathbf{X}(0) + B_{11}\mathbf{X}'(0) &= \mathbf{0}, \\ A_{21}\mathbf{X}(L) + B_{21}\mathbf{X}'(L) &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (20)$$

com,  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$  matrizes de ordem  $(2 \times 2)$ ,  $i, j = 1, 2$ .

Substituindo-se (18) em (20), e arranjando os elementos de forma conveniente obtemos o sistema matricial em blocos

$$\mathbf{B}\Phi\mathbf{C} = \mathbf{0}. \quad (21)$$

A matriz  $\mathbf{B}$  é de ordem  $(4 \times 8)$  e seus elementos são os coeficientes associados às condições de contorno do sistema

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} A_{11} & B_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{21} & B_{21} \end{bmatrix}, \quad (22)$$

a matriz  $\Phi$  é de ordem  $(8 \times 4)$  com os valores da base de soluções aplicada nas extremidades da corda, isto é,

$$\Phi = \begin{bmatrix} \mathbf{h}(0) & \mathbf{h}'(0) \\ \mathbf{h}'(0) & \mathbf{h}''(0) \\ \mathbf{h}(L) & \mathbf{h}'(L) \\ \mathbf{h}'(L) & \mathbf{h}''(L) \end{bmatrix}, \quad (23)$$

e,  $\mathbf{C}$  é o vetor com constantes dadas a partir de (19),

$$\mathbf{C} = [c_{11} \quad c_{12} \quad c_{21} \quad c_{22}]^T. \quad (24)$$

Para encontrar soluções não-nulas do sistema (21), é necessário que

$$\det(\mathbf{B}\Phi) = 0. \quad (25)$$

As soluções da equação acima são os autovalores  $\lambda$  do problema (11).

### 3.1 Cálculo da resposta impulso matricial

O cálculo da base dinâmica é feito utilizando-se uma fórmula fechada, (Claeysen et al., 1999)

$$\mathbf{h}(x) = \sum_{j=1}^{2n} \sum_{i=0}^{j-1} b_i d^{(j-i-1)}(x) \mathbf{h}_{2n-j}. \quad (26)$$

Os coeficientes  $b_i$  são coeficientes do polinômio característico  $P(s)$ , escrito em função das matrizes do sistema,

$$P(s) = \det[s^2\mathbf{K}_S + (\lambda^2\mathbf{M} + \lambda\mathbf{C} + \mathbf{K})]. \quad (27)$$

Desenvolvendo (27) obtém-se

$$\begin{aligned} b_0 &= S_1 S_2, \\ b_1 &= 0, \\ b_2 &= -S_1[m_2\lambda^2 + (c + c_2)\lambda + k] - \\ & \quad S_2[m_1\lambda^2 + (c + c_1)\lambda + k], \\ b_3 &= 0, \\ b_4 &= \lambda^2[m_1 m_2 \lambda^2 + (m_1 + m_2)k + c(c_1 + c_2) + c_1 c_2] \\ & \quad + [m_2(c + c_1) + m_1(c + c_2)]\lambda^3 + k(c_1 + c_2)\lambda. \end{aligned} \quad (28)$$

A matriz  $\mathbf{h}_k$  satisfaz a equação em diferenças

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_S \mathbf{h}_{k+2} + (\lambda^2 \mathbf{M} + \lambda \mathbf{C} + \mathbf{K}) \mathbf{h}_k &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{h}_0 &= \mathbf{0}, \mathbf{K}_S \mathbf{h}_1 = \mathbf{I}, \end{aligned} \quad (29)$$

de modo que,

$$\mathbf{h}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{S_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{S_2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}_2 = \mathbf{0}, \quad (30)$$

$$\mathbf{h}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{m_1\lambda^2 + \lambda(c + c_1) + k}{S_1^2} & \frac{\lambda c + k}{S_1 S_2} \\ \frac{\lambda c + k}{S_1 S_2} & -\frac{m_2\lambda^2 + \lambda(c + c_2) + k}{S_2^2} \end{bmatrix}, \quad (31)$$

e,  $d(x)$  é solução da equação diferencial

$$b_0 d^{(iv)}(x) + b_2 d''(x) + b_4 = 0, \quad (32)$$

com condições iniciais

$$b_0 d'''(0) = 1, \quad d''(0) = d'(0) = d(0) = 0. \quad (33)$$

A solução de (32) é dada por

$$d(x) = \frac{\sin(\xi x)}{b_0(\xi^2 - \delta^2)\xi} + \frac{\sin(\delta x)}{b_0(\xi^2 - \delta^2)\delta}, \quad (34)$$

onde,

$$\xi = \sqrt{\frac{b_2 - \sqrt{b_2^2 - 4b_0 b_4}}{2b_0}}, \quad \delta = \sqrt{\frac{b_2 + \sqrt{b_2^2 - 4b_0 b_4}}{2b_0}}. \quad (35)$$

As componentes da matriz  $\mathbf{h}(x)$ , de ordem 2, para o caso amortecido, podem ser escritas usando (28) e (30) como

$$\mathbf{h}_{11} = (\lambda^2 m_2 + \lambda(c + c_2) + k)d(x) - S_2 d''(x), \quad (36)$$

$$\mathbf{h}_{12} = \mathbf{h}_{21} = (\lambda c + k)d(x), \quad (37)$$

$$\mathbf{h}_{22} = (\lambda^2 m_1 + \lambda(c + c_1) + k)d(x) - S_1 d''(x). \quad (38)$$

Considerando-se vetores constantes,  $\mathbf{c}_1$  e  $\mathbf{c}_2$  de ordem  $(2 \times 1)$ , os modos  $\mathbf{X}(x)$  podem ser escritos como,

$$\mathbf{X}(x) = \mathbf{h}(x)\mathbf{c}_1 + \mathbf{h}'(x)\mathbf{c}_2. \quad (39)$$

Devido às condições de contorno (14), tem-se que

$$\mathbf{X}(x) = \mathbf{h}(x)\mathbf{c}. \tag{40}$$

As matrizes  $\mathbf{B}$  e  $\Phi$ , para o problema considerado aqui são, respectivamente

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \tag{41}$$

e,

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{K}_S^{-1} \\ \mathbf{K}_S^{-1} & 0 \\ \mathbf{h}(L) & \mathbf{h}'(L) \\ \mathbf{h}'(L) & \mathbf{h}''(L) \end{bmatrix}. \tag{42}$$

Assim, o sistema

$$\mathbf{B}\Phi\mathbf{C} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{C} = [\mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_2]^T, \tag{43}$$

pode ser simplificado,

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{K}_S^{-1} \\ \mathbf{h}(L) & \mathbf{h}'(L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{44}$$

Soluções não-nulas do sistema ocorrem quando

$$\det(\mathbf{h}(L)) = 0. \tag{45}$$

As raízes da equação (45) são os autovalores  $\lambda$  do problema amortecido. No caso geral, o cálculo dos autovalores precisa ser realizado utilizando-se softwares matemáticos e métodos numéricos. No entanto, considerando-se algumas simplificações no problema, é possível obter uma forma analítica para o cálculo das frequências e modos de vibração do problema.

### 4 Sistema desacoplável

O modelo descrito pelas equações (1) da seção 2, constitui um sistema acoplado de equações diferenciais de duas funções desconhecidas,  $w_1(t,x)$  e  $w_2(t,x)$ , o que dificulta a sua resolução. Uma maneira de resolver tais sistemas é operar as equações de modo que os fatores de acoplamento sejam eliminados. No entanto, para um sistema geral, nem sempre é possível, às vezes são necessárias algumas hipóteses que simplifiquem o problema, de modo que as equações sejam desacopláveis, ou no caso matricial, que as matrizes do problema sejam mutuamente diagonalizáveis. A seguir, é considerada uma simplificação para o sistema (1), obtendo-se matrizes diagonalizáveis. Para isso, primeiramente considere os seguinte resultados

**Lema 4.1.** *Considere as matrizes  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{K}$  dadas abaixo*

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}, \tag{46}$$

então, definindo

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \tag{47}$$

decorre que,

$$\lambda^2\mathbf{P}^T\mathbf{M}\mathbf{P} + \mathbf{P}^T\mathbf{K}\mathbf{P} = \lambda^2\mathbf{M}_d + \mathbf{K}_d, \tag{48}$$

onde,  $\mathbf{M}_d$  e  $\mathbf{K}_d$  são matrizes diagonais.

**Corolário 4.2.** *Dadas as matrizes*

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} r & -r \\ -r & r \end{bmatrix}, \tag{49}$$

a transformação,

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \tag{50}$$

é tal que

- $\mathbf{P}^T = \mathbf{P}^{-1}$
- $\mathbf{P}^T\mathbf{D}\mathbf{P} = \mathbf{D}$
- $\mathbf{P}^T\mathbf{R}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2r \end{bmatrix}$

Em Oniszczyk (2003), o sistema de duas cordas anexas viscoelásticamente foi tomado de um modo simplificado, considerando-se os coeficientes de amortecimento viscoso,  $c_i$ , de unidade de massa,  $m_i$  e de tensão,  $S_i$ , como sendo os mesmos, isto é,

$$c_i = C, \quad m_i = m, \quad S_i = S, \quad i = 1,2. \tag{51}$$

Dessa forma, o sistema (5) é dado por

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{w}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{w}} + (\mathbf{K}_k + \mathbf{K}_o)\mathbf{w} = \mathbf{0}, \tag{52}$$

onde,

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c + C & -c \\ -c & c + C \end{bmatrix}, \tag{53}$$

$$\mathbf{K}_k = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_o = \begin{bmatrix} -S\frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 \\ 0 & -S\frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{bmatrix}. \tag{54}$$

Os operadores matriciais,  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{K}_k$  e  $\mathbf{K}_o$  satisfazem as hipóteses do Lema 4.1 e, portanto, são diagonalizáveis. Observe que o operador  $\mathbf{C}$  pode ser escrito da forma

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix}, \tag{55}$$

ou seja,  $\mathbf{C}$  é uma combinação linear das matrizes  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{K}_k$ , portanto, também pode ser diagonalizado pela matriz ortogonal  $\mathbf{P}$ . Este amortecimento é conhecido na literatura como amortecimento de Rayleigh, Inman (2001), Meirovitch (1997).

Considere a seguinte mudança de variáveis para o sistema amortecido (52),

$$\mathbf{w}(t,x) = \mathbf{P}\mathbf{u}(t,x), \tag{56}$$

onde  $\mathbf{P}$  é dado por (47). De (52) e (56), obtém-se,

$$\mathbf{P}^T \mathbf{M} \mathbf{P} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{P}^T \mathbf{C} \mathbf{P} \dot{\mathbf{u}} + (\mathbf{P}^T \mathbf{K}_k \mathbf{P} + \mathbf{P}^T \mathbf{K}_o \mathbf{P}) \mathbf{u} = \mathbf{0}, \tag{57}$$

ou, desenvolvendo o operador de  $\mathbf{K}_o$ ,

$$\mathbf{P}^T \mathbf{M} \mathbf{P} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{P}^T \mathbf{C} \mathbf{P} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{P}^T \mathbf{K}_k \mathbf{P} \mathbf{u} + \mathbf{P}^T \mathbf{K}_S \mathbf{P} \mathbf{u}'' = \mathbf{0}, \tag{58}$$

onde,

$$\mathbf{K}_S = \begin{bmatrix} -S & 0 \\ 0 & -S \end{bmatrix}. \tag{59}$$

Desta forma, utilizando-se (55) e o Corolário 4.2, obtém-se a diagonalização das matrizes  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{K}_k$  e  $\mathbf{K}_S$ , resultando no seguinte sistema desacoplado,

$$\mathcal{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathcal{C} \dot{\mathbf{u}} + (\mathcal{K}_k + \mathcal{K}_o) \mathbf{u} = \mathbf{0}, \tag{60}$$

onde,

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}, \quad \mathcal{C} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & C + 2c \end{bmatrix}, \tag{61}$$

$$\mathcal{K}_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2k \end{bmatrix}, \quad \mathcal{K}_o = \begin{bmatrix} -S \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 \\ 0 & -S \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{bmatrix}. \tag{62}$$

Supondo uma solução exponencial para o sistema (60), da forma

$$\mathbf{u}(t,x) = e^{\gamma t} \mathbf{U}(x) = \begin{bmatrix} U_1(x) \\ U_2(x) \end{bmatrix}, \tag{63}$$

obtém-se o problema de autovalor

$$[\gamma^2 \mathcal{M} + \gamma \mathcal{C} + (\mathcal{K}_k + \mathcal{K}_o)] \mathbf{U}(x) = \mathbf{0}, \tag{64}$$

de onde decorre o sistema de equações diferenciais envolvendo os modos  $\mathbf{U}(x)$ ,

$$\mathcal{K}_S \mathbf{U}''(x) + (\gamma^2 \mathcal{M} + \gamma \mathcal{C} + \mathcal{K}_k) \mathbf{U}(x) = \mathbf{0}, \tag{65}$$

$$\mathbf{U}(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{U}(L) = \mathbf{0}.$$

Os modos  $\mathbf{U}(x)$  são, então, escritos em função da base dinâmica, composta pela matriz  $\hat{\mathbf{h}}(x)$ , solução do problema de valor inicial

$$\mathcal{K}_S \hat{\mathbf{h}}''(x) + (\gamma^2 \mathcal{M} + \gamma \mathcal{C} + \mathcal{K}_k) \hat{\mathbf{h}}(x) = \mathbf{0}, \tag{66}$$

$$\hat{\mathbf{h}}(0) = \mathbf{0}, \quad \mathcal{K}_S \hat{\mathbf{h}}(0) = \mathbf{I},$$

e sua derivada,  $\hat{\mathbf{h}}'(x)$ . A partir das condições de contorno (65) do sistema, obtém-se,

$$\mathbf{U}(x) = \hat{\mathbf{h}}(x) \mathbf{c}, \quad \mathbf{c} = [c_1 \quad c_2]^T. \tag{67}$$

O cálculo de  $\hat{\mathbf{h}}(x)$  é feito utilizando-se a fórmula (26), obtendo-se, a matriz diagonal com componentes

$$\hat{\mathbf{h}}_{11}(x) = [\gamma^2 m + (C + 2c)\gamma + 2k]d(x) - Sd''(x), \tag{68}$$

$$\hat{\mathbf{h}}_{12} = \hat{\mathbf{h}}_{21} = 0, \tag{69}$$

$$\hat{\mathbf{h}}_{22} = (\gamma^2 m + \gamma C)d(x) - Sd''(x), \tag{70}$$

onde,

$$d(x) = -\frac{\sin(\xi x)}{S^2(\xi^2 - \delta^2)\xi} + \frac{\sin(\delta x)}{S^2(\xi^2 - \delta^2)\delta}, \tag{71}$$

com  $\xi$  e  $\delta$  soluções de

$$b_0 r^4 - b_2 r^2 + b_4 = 0, \tag{72}$$

$$\begin{aligned} b_0 &= S^2; \\ b_2 &= -2S(\lambda^2 m + (C + c)\lambda + K); \\ b_4 &= (\lambda^2 m + \lambda C)[\lambda^2 m + (C + 2c)\lambda + 2k], \end{aligned} \tag{73}$$

de modo que,

$$\xi = \frac{\sqrt{-S[\lambda^2 m + (C + 2c)\lambda + 2k]}}{S}, \quad \delta = \frac{\sqrt{-\lambda S(\lambda m + C)}}{S}. \tag{74}$$

Usando (74) nas equações (68) e (70), componentes da matriz  $\hat{\mathbf{h}}(x)$ , obtém-se,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{h}}_{11}(x) &= -2(k + \lambda c)\xi \sin(\delta x), \\ \hat{\mathbf{h}}_{22}(x) &= -2(k + \lambda c)\delta \sin(\xi x), \\ \mathbf{h}_{12} = \mathbf{h}_{21} &= 0. \end{aligned} \tag{75}$$

Decorre de (75) e das condições de contorno dadas em (65), que soluções não nulas para  $\mathbf{c}$  em (67) ocorrem quando

$$\sin(\delta L) = 0 \quad \text{e} \quad \sin(\xi L) = 0. \tag{76}$$

Da relação acima obtém-se

$$\delta = \delta_n = \frac{n\pi}{L} \quad \text{e} \quad \xi = \xi_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{77}$$

Para  $\delta_n = \frac{n\pi}{L}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , os autovalores podem ser calculados através da fórmula

$$\lambda_{1n} = \frac{-C \pm \sqrt{C^2 - 4mS\delta_n^2}}{2m}, \tag{78}$$

e os modos de vibração  $U_1(x)$  possuem a seguinte forma

$$U_1(x) = \hat{\mathbf{h}}_{11}(x)c_1. \tag{79}$$

Para  $\xi_n = \frac{n\pi}{L}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , os autovalores são dados por

$$\lambda_{2n} = \frac{-(C + 2c) \pm \sqrt{(C + 2c)^2 - 2m(2k + S\xi_n^2)}}{2m}, \tag{80}$$

e os modos de vibração  $U_1(x)$  são da forma

$$U_2(x) = \hat{h}_{22}c_2. \tag{81}$$

Assim, os modos de vibração  $U(x)$  do sistema desacoplado (60) são as componentes da matriz  $\hat{h}(x)$  para cada autovalor  $\gamma$  encontrado.

Observe ainda que, a transformação  $P$  dada em (47), diagonaliza a matriz  $h(x)$ , componente da base dinâmica para o caso amortecido acoplado, dado por (36), (37) e (38), quando considera-se as hipóteses (51), além disso, a matriz diagonal correspondente é exatamente igual à matriz  $\hat{h}(x)$ , isto é,

$$P^T h(x) P = \hat{h}(x), \tag{82}$$

no caso em que são consideradas as hipóteses (51).

Dessa forma, a partir de (56) e (82), observa-se que denotando-se por  $X(x)$  os modos do sistema original acoplado (52), vale a seguinte relação,

$$X(x) = P U(x), \tag{83}$$

de modo que, os modos de vibração do sistema geral podem ser calculados a partir dos modos de vibração do sistema desacoplado associado. A resposta amortecida para o sistema, dada em (56), pode ser escrita na forma

$$w(t,x) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{\gamma_i t} P U_i(x), \tag{84}$$

ou ainda,

$$w(t,x) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{Re(\gamma_i)t} (A_i \cos(Im(\gamma_i)t) + i B_i \sin(Im(\gamma_i)t)) P U_i(x), \tag{85}$$

onde,  $U_i(x)$  representa o  $i$ -ésimo modo de vibração associado ao autovalor  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$ .

As constantes  $A_i$  e  $B_i$  podem ser calculadas a partir das condições iniciais e do uso da ortogonalidade entre as autofunções ou modos de vibração do problema.

## 5 Exemplo Numérico

Nesta seção é apresentado um exemplo numérico para o sistema de duas cordas anexadas por uma camada viscoelástica. Nas simulações, são consideradas cordas com mesma massa por unidade de comprimento e sujeitas a mesma tensão.

A Tabela 1 apresenta os parâmetros considerados, Oniszczyk (2000b). A Tabela 2 apresenta os seis primeiros autovalores para o problema amortecido, os quais são enumerados comparando-se a parte imaginária com as frequências naturais encontradas no caso sem amortecimento. Pode ser observado a proximidade da parte

imaginária dos autovalores amortecidos ( $\lambda_a$ ) com as frequências do caso sem amortecimento ( $\lambda_{na}$ ), isto ocorre devido ao tipo de amortecimento escolhido para as simulações.

Parâmetro	Valor numérico	Unidade
$L$	1	m
$A_i$	$2 \times 10^{-6} \text{ m}^2$	
$\rho_i$	$5 \times 10^3 \text{ kgm}^{-3}$	
$m_i$	$1 \times 10^{-2}$	$\text{kgm}^{-1}$
$S_i$	50	N
$k$	$2 \times 10^2$	$\text{Nm}^{-2}$
$c_i$	$1 \times 10^{-1}$	$\text{Nsm}^{-1}$
$c$	$6 \times 10^{-1}$	$\text{Nsm}^{-1}$

Tabela 1: Parâmetros para o sistema dupla-corda

$\lambda_{ij}$	$\lambda_a$	$\lambda_{na}$
$\lambda_{11}$	$-5,00 + 222,08i$	222,14i
$\lambda_{12}$	$-65,00 + 291,75i$	298,91i
$\lambda_{21}$	$-5,00 + 444,26i$	444,28i
$\lambda_{22}$	$-65,00 + 482,87i$	487,22i
$\lambda_{31}$	$-5,00 + 666,41i$	666,43i
$\lambda_{32}$	$-65,00 + 692,75i$	695,79i

Tabela 2: Autovalores do sistema amortecido ( $\lambda_a$ ) e não amortecido ( $\lambda_{na}$ )

Cada par de autovalores na Tabela 2 possui um autovalor com parte imaginária mais baixa ( $\lambda_{i1}$ ,  $i = 1, 2, 3$ ), e outro com a parte imaginária mais alta ( $\lambda_{i2}$ ,  $i = 1, 2, 3$ ), denominados a partir de agora como *primeiro autovalor* e *segundo autovalor* de cada par, respectivamente. Os modos de vibração executam dois tipos de movimentos, síncronos e não-síncronos, dependendo do autovalor considerado. Os *primeiros autovalores* de cada par geram modos síncronos, conforme ilustrado na Figura 2. Na Figura 3, são apresentados os modos não-síncronos, gerados pelos *segundos autovalores* de cada par.

A Figura 4 apresenta a componente real da resposta livre amortecida para a primeira e segunda corda. A Figura 5 apresenta a parte imaginária ou oscilatória da resposta amortecida do sistema. A amplitude de vibração da primeira corda apresentou-se relativamente maior que na segunda corda no caso considerado. A ação do amortecimento na vibração do sistema pode ser observada, isto é, a amplitude da resposta diminui com o passar do tempo, tanto na primeira, como na segunda corda. Além disso, é possível observar uma maior oscilação da primeira corda comparado à segunda, no intervalo de tempo considerado.

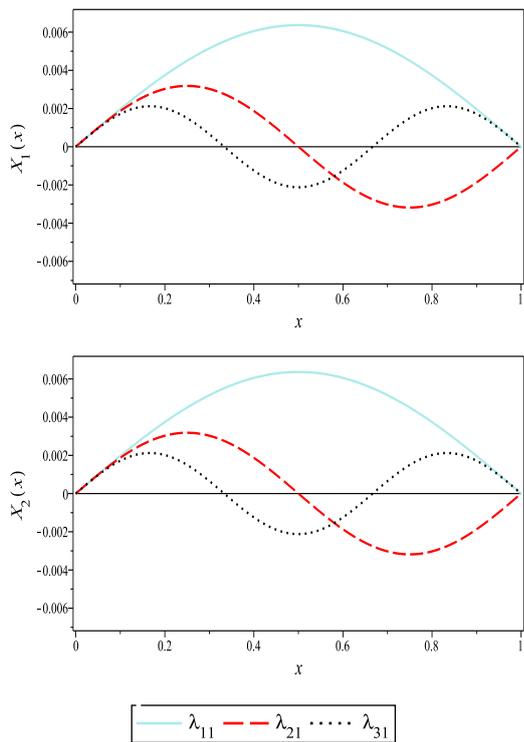


Figura 2: Três primeiros modos síncronos

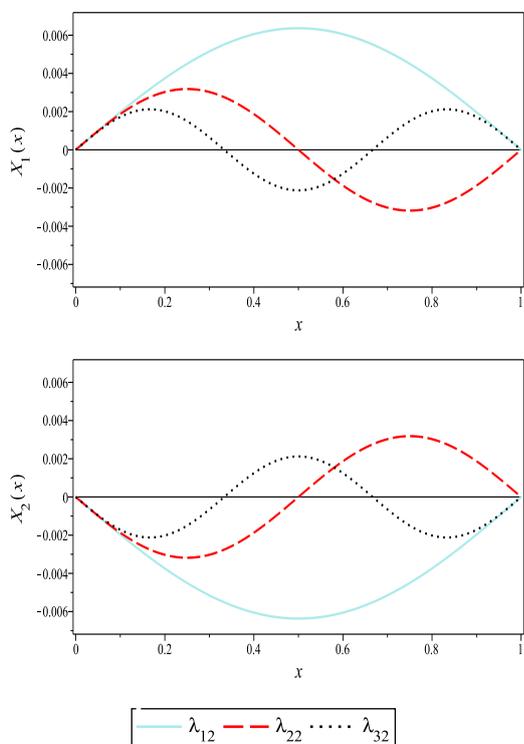
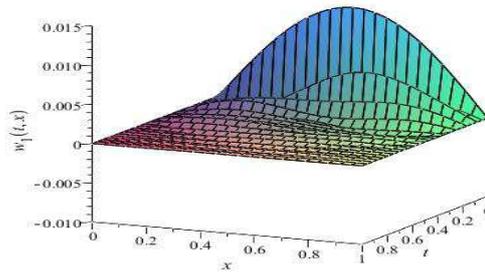
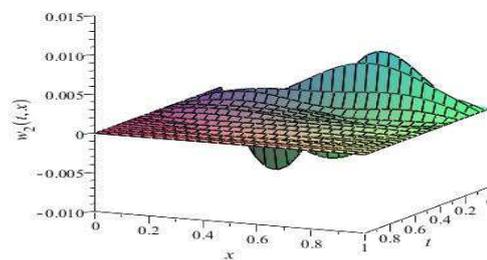


Figura 3: Três primeiros modos assíncronos

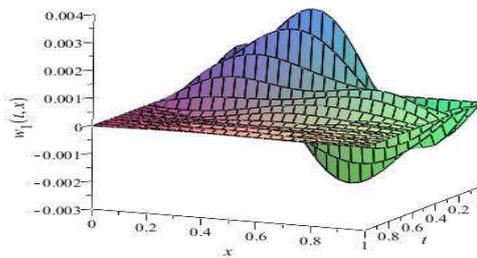


(a) Primeira corda

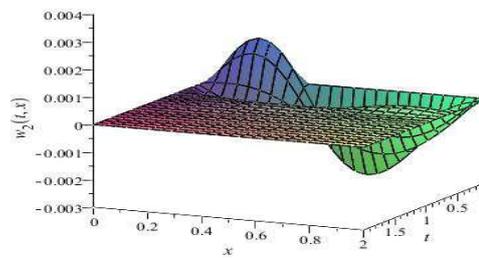


(b) Segunda corda

Figura 4: Parte real da resposta livre do sistema dupla corda



(a) Primeira corda



(b) Segunda corda

Figura 5: Parte imaginária da resposta livre do sistema dupla corda

## 6 Conclusão

Neste trabalho, foi considerado um sistema composto por duas cordas de mesmo comprimento, bi-apoiadas e acopladas através de uma camada viscoelástica. A partir da formulação matricial em blocos e do uso da análise modal encontrou-se uma equação diferencial de segunda ordem, cujas soluções são os modos de vibração ou autofunções do sistema. Os modos de vibração foram escritos em termos da base dinâmica, composta pela solução de um problema de segunda ordem com condições iniciais impulsivas e sua primeira derivada. No caso amortecido livre, um sistema desacoplável foi encontrado a partir de simplificações nos parâmetros do problema, possibilitando encontrar uma expressão para o cálculo dos autovalores e autofunções do sistema. Os modos de vibração foram classificados em síncronos e assíncronos dependendo do autovalor ao qual estão associados. Observou-se que os primeiros autovalores de cada par geram modos síncronos, enquanto que os segundos autovalores de cada par, geram modos assíncronos. As simulações foram realizadas usando o software matemático Maple 11.

## Referências

- Chopra, A. K., 1995. Dynamics of structures: theory and applications to earthquake engineering. Vol. 2. Prentice Hall Englewood Cliffs, NJ.
- Claeyssen, J., Soder, R., 2003. A dynamical basis for computing the modes of euler-bernoulli and timoshenko beams. *Journal of Sound and Vibration* 259 (4), 986–990.
- Claeyssen, J. R., Canahualpa, G., Jung, C., 1999. A direct approach to second-order matrix non-classical vibrating equations. *Applied Numerical Mathematics* 30 (1), 65–78.
- Claeyssen, J. R., Moraes Ferreira, I., Copetti, R. D., 2003. Decomposition of forced responses in vibrating systems. *Applied numerical mathematics* 47 (3), 391–405.
- Claeyssen, J. R., Tsukazan, T., Copetti, R. D., 2012. Eigenanalysis of an euler-bernoulli model coupled with van der waals forces for carbon nanotubes. *IMA Journal of Applied Mathematics*.
- Claeyssen, J. R., Tsukazan, T., Copetti, R. D., 2013. Non-local effects in modal analysis of forced responses with single carbon nanotubes. *Mechanical Systems and Signal Processing*.
- Copetti, R. D., Claeysen, J. R., Tsukazan, T., 2007. Modal formulation of segmented euler-bernoulli beams. *Mathematical Problems in Engineering* 2007 (ID 36261), 18 pages.
- De Dayan, H., Behar, A., 1979. The quality of strings for guitars: an experimental study. *Journal of Sound and Vibration* 64 (3), 421–431.
- Foda, M. A., 2013. Transverse vibration control of translating visco-elastically connected double-string-like continua. *Journal of Vibration and Control* 19 (9), 1316–1332.
- Ghayesh, M. H., 2008. Nonlinear transversal vibration and stability of an axially moving viscoelastic string supported by a partial viscoelastic guide. *Journal of Sound and Vibration* 314 (3), 757–774.
- Inman, D., 2001. *Engineering Vibration*. Prentice Hall.
- Kelly, S. G., 2011. Free and forced vibrations of elastically connected structures. *Advances in Acoustics and Vibration* 2010.
- Krenk, S., Nielsen, S. R., 2002. Vibrations of a shallow cable with a viscous damper. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 458 (2018), 339–357.
- Leissa, A., 1978. A direct method for analyzing the forced vibrations of continuous systems having damping. *Journal of Sound and Vibration* 56 (3), 313–324.
- Meirovitch, L., 1997. *Principles and techniques of vibrations*. Prentice Hall New Jersey.
- Oniszczyk, Z., 2000a. Transverse vibrations of elastically connected double-string complex system, part I: free vibrations. *Journal of sound and vibration* 232 (2), 355–366.
- Oniszczyk, Z., 2000b. Transverse vibrations of elastically connected double-string complex system, part II: forced vibrations. *Journal of sound and vibration* 232 (2), 367–386.
- Oniszczyk, Z., 2003. Damped vibration analysis of an elastically connected complex double-string system. *Journal of sound and vibration* 264 (2), 253–271.
- Rao, S. S., 2009. *Vibrações mecânicas*. Pearson Prentice Hall.
- Rusin, J., Śniady, P., Śniady, P., 2011. Vibrations of double-string complex system under moving forces. closed solutions. *Journal of Sound and Vibration* 330 (3), 404–415.

- Seibel, A. B., 2013. Uso da base dinâmica em um sistema de duas vigas acopladas. Dissertação (mestrado em matemática), Universidade Federal de Santa Maria.
- Tan, C., Ying, S., 2000. Active wave control of the axially moving string: theory and experiment. *Journal of sound and vibration* 236 (5), 861–880.
- Tolfo, D. d. R., 2013. Sobre o espectro de frequências do modelo de Timoshenko para uma viga bi-apoiada. Dissertação (mestrado em matemática), Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- Tsukazan, T., 2005. The use of a dynamical basis for computing the modes of a beam system with a discontinuous cross-section. *Journal of Sound Vibration* 281, 1175–1185.
- Xu, Y., Yu, Z., Ko, J., 1998. Forced vibration studies of sagged cables with oil damper using a hybrid method. *Engineering structures* 20 (8), 692–705.