Ciência e Natura, Santa Maria, v. 36 Ed. Especial II, 2014, p. 350–358
Revista do Centro de Ciências Naturais e Exatas - UFSM
ISSN impressa: 0100-8307 ISSN on-line: 2179-460X

Estabilidade quase uniforme de um problema termoeástico semi linear

Uniform stability of a thermoelastic semi linear problem

Celene Buriol*[1], Lorens Estevan Buriol Siguenas[2]

[1]Professora associado I do departamento de Matemática, Universidade Federal de Santa Maria,
Santa Maria, , RS,Brasil.
Professora IFF-Julio de Castilhos, Julio de Castilhos, RS, Brasil

Resumo

Consideramos neste trabalho um modelo que descreve a dinâmica não linear de uma placa termoelástica não limitada. Provemos que o sistema é bem posto e analizamos o comportamento da energia total $E(t)$, quando $t \to \infty$. Nosso principal resultado mostra que a energia total do sistema decai exponencialmente e satisfaz a seguinte estimativa: $E(t) \leqslant 3E(0)e^{(-\gamma t)}$, $\forall t > 0$ em que $\gamma = \gamma(E(0)) > 0$, utilizaremos como ferramenta a construção de uma função de Lyapunov que é uma pertubação adequada da energia e satisfaz a desigualdade diferencial que conduz à estimativa de decaimento.

Palavras-chave: *Placa termoelástica, Decaimento exponencial, Função de Lyapunov*

Abstract

In this paper we consider a model that describes the nonlinear dynamics of a not bounded thermoelastic plate . Let us prove that the system is well-posed and we analyzed the behavior of the total energy $E(t)$ when $t \to \infty$. Our main results show that the total energy of the system decays exponentially, and satisfies the following estimate: $E(t) \leqslant 3E(0)e^{(-\gamma t)}$, $\forall t > 0$ where $\gamma = \gamma(E(0)) > 0$,.To this we use a suitable Lyapunov function which is a perturbation energy and satisfies the differential leading to estimate decay inequality.

Keywords: *Thermoelastic plate, Exponential decay, Lyapunov Function*

*celene.buriol@ufsm.br

Recebido: 15/01/2014 Aceito: 08/04/2014

1 Introdução

O estudo de modelos de evolução descritos por equações diferenciais parciais em domínios não limitados vem sendo abordado por vários autores nas últimas décadas. Estudaremos neste trabalho um modelo não linear em domínio ilimitado com a seguinte não linearidade

$$M\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^2dx\right)\Delta u \quad \text{onde} \quad u=u(x,t) \quad \text{para} \quad x\in\mathbb{R}^n,\ t\in\mathbb{R},\ t\geqslant 0 \tag{1}$$

$$\text{e} \quad M\in C^1(\mathbb{R}^+) \ \text{ e } \ M(s),M'(s)\geqslant 0,\ \forall s\geqslant 0. \tag{2}$$

Os casos $n=1$ e $n=2$ são significativos. Nesses casos (1) é usualmente conhecida como não linearidade do tipo Timoshenko e aparece numa variedade de modelos, na maioria das vezes associada com vibrações não lineares de vigas e placas Eisley (1964).

Utilizaremos a teoria de semigrupos, para estudar a existência e unicidade de solução global do modelo termoelástico

$$\begin{cases} u_{tt}+\Delta^2u+u-M\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^2dx\right)\Delta u-\theta+\Delta\theta=0 \\ \quad \text{em } \mathbb{R}^n\times(0,+\infty), \\ \theta_t+\theta-\Delta\theta+u_t-\Delta u_t=0 \ \text{ em } \mathbb{R}^n\times(0,+\infty), \\ u(x,0)=u_0(x),\ u_t(x,0)=u_1(x),\ \theta(x,0)=\theta_0(x) \\ \quad \text{em } \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{3}$$

onde M é uma função que satisfaz as condições (2), $u=u(x,t)$ é o deslocamento ao tempo $t\geqslant 0$ e $x\in\mathbb{R}^n$, $\theta=\theta(x,t)$ é a diferença de temperatura com relação a uma temperatura de referência fixa.

Analisaremos o comportamento da energia total

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}(u_t^2+|\Delta u|^2+u^2+\theta^2)dx+\frac{1}{2}\widehat{M}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^2dx\right), \tag{4}$$

com $\widehat{M}(\lambda)=\int_0^\lambda M(s)ds$, associada ao modelo (3) quando $t\to+\infty$.

Em (4), através de um cálculo direto supondo regularidade suficientes nas soluções u e θ verificamos que

$$\frac{d}{dt}\{E(t)\}=-\int_{\mathbb{R}^n}\theta^2dx-\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla\theta|^2dx\leqslant 0 \tag{5}$$

o qual diz que $E(t)$ é não crescente $\forall t\geqslant 0$.

Observe que o modelo (3) é um acoplamento entre a parte mecânica e o efeito térmico. Em geral poderia ser considerada a classe

$$\begin{cases} u_{tt}+\Delta^2u+f(u,\theta,\Delta\theta,\nabla u,\Delta u)=0 \ \text{ em } \mathbb{R}^n\times(0,+\infty), \\ \theta_t-\Delta\theta+g(\theta,u_t,\Delta u_t)=0 \ \text{ em } \mathbb{R}^n\times(0,+\infty) \end{cases} \tag{6}$$

sendo f e g funções satisfazendo condições apropriadas nas suas componentes.

Denk et al. (2010) consideraram a parte linear do modelo (3) sem os termos $u,-\theta,\theta,u_t$ num domínio exterior a uma região limitada do $\mathbb{R}^n(n=2,3)$. Mais precisamente foi considerado o problema

$$\begin{cases} u_{tt}+\Delta^2u+\Delta\theta=0 \ \text{ em } \Omega\times(0,+\infty), \\ \theta_t-\Delta\theta-\Delta u_t=0 \ \text{ em } \Omega\times(0,+\infty), \\ u|_\Gamma=D_\nu|_\Gamma=\theta|_\Gamma=0 \ \text{ para } x\in\Omega, \end{cases} \tag{7}$$

onde Ω é um domínio exterior de $\mathbb{R}^n(n=2,3)$; Γ é a fronteira de Ω, $D_\nu=\sum_{j=1}^n\nu_j\frac{\partial}{\partial x_j}$ e $\nu=(\nu_1,\ldots,\nu_n)$ é o vetor unitário normal exterior a Γ.

Nesse caso temos que

$$\frac{d}{dt}\{E(t)\}=-\int_\Omega|\nabla\theta|^2dx\leqslant 0; \tag{8}$$

onde

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_\Omega(u_t^2+|\Delta u|^2+\theta^2)dx,$$

é a energia total associada ao modelo (7).

Em Denk et al. (2010) os autores consideram soluções fortes nos espaços funcionais adequados e mostraram que (localmente) as soluções possuem decaimento logarítmo no caso $n=2$ e decaimento polinomial no caso $n=3$. Para obter a taxa de decaimento da solução associada ao modelo (7) foram utilizadas fórmulas de expansão associadas ao resolvente do semigrupo analítico associado ao modelo.

Em nosso trabalho um dos objetivos é obter uma taxa de decaimento global para a energia associada ao modelo (3). Para isso estamos propondo o caso especial onde $f=u-\theta+\Delta\theta-a(t)\Delta u$ e $g=\theta+u_t-\Delta u_t$ com $a(t)=M\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^2dx\right)$ o qual permite usar a coercividade do operador $I-\Delta$.

É evidente que em (3) poderíamos considerar coeficientes constantes (positivos) nos termos de f e g, porém os cálculos seriam essencialmente os mesmos.

Poderia ser questionado a eliminação dos termos $-\theta$ em f e u_t em g. Certamente para obter a existência de solução global não seria problema, no entanto, para o comportamento assintótico nossos funcionais teriam que ser modificados ou substituídos por outros que ainda não estudamos.

Neste trabalho determinaremos uma taxa de decaimento quase uniforme para $E(t)$ dada em (4). Para obter essa taxa de decaimento seguiremos as idéias contidas em ç, Menzala e Zuazua (1998) e Menzala e Zuazua (2003) e construiremos um funcional de Lyapunov adequado, o que é possível devido a propriedade de coercividade do operador $I - \Delta$.

Mais precisamente, provamos que a energia total $E(t)$ associado ao modelo (3) decai exponencialmente, isto é, $E(t) \leqslant 3E(0)e^{-\gamma t}$, $\forall t \geqslant 0$ onde γ é uma constante positiva que depende somente da energia inicial.

2 Existência e Unicidade de Solução para o Modelo (3)

Fazendo a mudança de variável $u_t = v$ podemos escrever o modelo (3) como um sistema de primeira ordem em t;

$$\frac{d}{dt}U = AU + \tilde{N}U \tag{9}$$

onde $U(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix}$, $\tilde{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ com N dada por

$$N(u) = a(t)\Delta u \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ -\Delta^2 - I & 0 & I - \Delta \\ 0 & \Delta - I & \Delta - I \end{pmatrix},$$

com $a(t) = M\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx\right)$.

Introduziremos agora o espaço de Hilbert $\mathcal{H} = H^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$ com o seguinte produto interno

$$\left(\begin{bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \tilde{\theta} \end{bmatrix} \right)_{\mathcal{H}} = (u,\tilde{u})_{H^2} + (v,\tilde{v}) + (\theta,\tilde{\theta}).$$

sendo $(u,v,\theta), (\tilde{u},\tilde{v},\tilde{\theta}) \in \mathcal{H}$ e por notação adaptada $(.,.), ||.||$ denotam o produto interno e a norma em $L^2(\mathbb{R}^n)$ respectivamente.

O domínio natural de A é dado por:

$$\mathcal{D}(A) = H^4(\mathbb{R}^n) \times H^2(\mathbb{R}^n) \times H^2(\mathbb{R}^n).$$

Com as notações acima, provaremos o seguinte resultado que será de fundamental importância para a obtenção de existência de solução de (3).

Teorema 1. *A parte linear de (9), $\frac{d}{dt}U = AU$, com A dado anteriormente, é governada por um semigrupo de contrações de classe C_0 sobre $\mathcal{H}$.*

Demonstração: De acordo com o Teorema Lumer-Phillips (ver Pazy (1983), pg.14)é suficiente provar que $\mathcal{D}(A)$ é denso em $\mathcal{H}$ e A é um operador m-dissipativo sobre $\mathcal{H}$. Neste caso vamos considerar $\lambda_0 = 1$. A seguir provaremos esses fatos.

De fato, a densidade de $\mathcal{D}(A)$ em $\mathcal{H}$ é clássica.

Provamos agora que A é m-dissipativo em $\mathcal{H}$. Dado $[u,v,\theta] \in \mathcal{D}(A)$, vemos que

$$\begin{aligned}
Re(AU,U)_{\mathcal{H}} &= \left(\begin{bmatrix} v \\ -\Delta^2 u - u + \theta - \Delta\theta \\ \Delta v - v + \Delta\theta - \theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{bmatrix} \right)_{\mathcal{H}} \\
&= (v,u)_{H^2} + (-\Delta^2 u - u + \theta - \Delta\theta, v) \\
&+ (\Delta v - v + \Delta\theta - \theta, \theta) \\
&= (v,u) + (\Delta v,\Delta u) - (\Delta u,\Delta v) \\
&- (u,v) + (\theta,v) - (\Delta\theta,v) + \\
&+ (\Delta v,\theta) - (v,\theta) - (\nabla\theta,\nabla\theta) - (\theta,\theta) \\
&= -(\nabla\theta,\nabla\theta) - (\theta,\theta) \\
&= -||\nabla\theta||^2 - ||\theta||^2 \leqslant 0
\end{aligned}$$

Assim A é um operador dissipativo sobre $\mathcal{H}$. Falta mostrar que dado $[f,g,h] \in \mathcal{H}$, existe um elemento $[u,v,\theta] \in \mathcal{D}(A)$ tal que

$$(I - A) \begin{bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \\ h \end{bmatrix} \tag{10}$$

a equação (10) implica que

$$\begin{cases} u - v = f \\ v + \Delta^2 u + u - \theta + \Delta\theta = g \\ \theta - \Delta v + v - \Delta\theta + \theta = h \end{cases}$$

substituindo $v = u - f$ na segunda e terceira equação do sistema acima, obtemos

$$\begin{cases} 2u + \Delta^2 u - \theta + \Delta\theta = g + f \\ 2\theta + u - \Delta\theta - \Delta u = h + f - \Delta f. \end{cases} \tag{11}$$

Para resolver (11), baseados em cálculos formais, definimos a forma bilinear sobre o espaço de Hilbert $H^2 \times H^1$

$$a : [H^2 \times H^1]^2 \to \mathbb{R}$$

dada por

$$\begin{aligned}
a\left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix} \right) &= 2(u,\varphi) + (\Delta u,\Delta\varphi) - (\theta,\varphi) \\
&+ (\theta,\Delta\varphi) + 2(\theta,\psi) + (u,\psi) \\
&- (\Delta u,\psi) + (\nabla\theta,\nabla\psi)
\end{aligned}$$

e a forma linear

$$\begin{aligned}
T: \quad H^2 \times H^1 &\to \mathbb{R} \\
[\varphi,\psi] &\longmapsto T([\varphi,\psi])
\end{aligned}$$

com

$$T([\varphi,\psi]) = \int_{\mathbb{R}^n} (g+f)\varphi dx + \int_{\mathbb{R}^n} (f-\Delta f)\psi dx + \int_{\mathbb{R}^n} h\psi dx.$$

Claramente $a(.,.)$ é contínua e coerciva, de fato

$$\begin{aligned} a\left(\begin{bmatrix} u \\ \theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u \\ \theta \end{bmatrix}\right) &= 2(u,u) + (\Delta u,\Delta u) - (\theta,u) + (\theta,\Delta u) \\ &+ 2(\theta,\theta) + (u,\theta) - (\Delta u,\theta) + (\nabla\theta,\nabla\theta) \\ &\geqslant (u,u) + (\Delta u,\Delta u) + (\theta,\theta) + (\nabla\theta,\nabla\theta) \\ &= ||u||^2 + ||\Delta u||^2 + ||\theta||^2 + ||\nabla\theta||^2 \\ &= ||u||^2_{H^2} + ||\theta||^2_{H^1}. \end{aligned}$$

e garantimos que $T \in (H^2 \times H^1)'$.

Com isso, o Teorema de Lax-Milgran, garante que existe um único $[u,\theta] \in H^2 \times H^1$ que é solução de:

$$a\left(\begin{bmatrix} u \\ \theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix}\right) = (f+g,\varphi) + (f,\psi) - (\nabla f,\psi) + (h,\psi) \quad (12)$$

para todo $[\varphi,\psi] \in H^2 \times H^1$.

Tomando $\varphi = 0$, em (12) temos

$$\begin{aligned} 2 &\quad (\theta,\psi) + (u,\psi) - (\Delta u,\psi) + (\nabla\theta,\nabla\psi) \\ = &\quad (f,\psi) + (\Delta f,\psi) + (h,\psi), \forall\psi \in H^1 \end{aligned}$$

o que implica que θ é solução da equação

Portanto pelo Teorema da Regularidade Elíptica $\theta \in H^2(\mathbb{R}^n)$ (para mais detalhes veja Brezis (2010)). Agora se $\psi = 0$, em (12) temos

$$2(u,\varphi) + (\Delta u,\Delta\varphi) - (\theta,\varphi) + (\theta,\Delta\varphi) = (f+g,\varphi), \forall\varphi \in H^2$$

que também implica que u é uma solução da equação

Logo $u \in H^4(\mathbb{R}^n)$. Considerando esses fatos concluimos que $R(I-A) = \mathcal{H}$, com isso A é um operador m-dissipativo sobre $\mathcal{H}$. ∎

Estudaremos agora a parte não linear do modelo (3). Para isso consideraremos o seguinte resultado:

Lema 1. *Sejam $N = N(u)$ definida anteriormente e M satisfazendo (2). Então a aplicação $N : H^{m+2}(\mathbb{R}^n) \to H^m(\mathbb{R}^n)$ $m \geqslant 0$, satisfaz a seguinte condição.*

$$||N(u) - N(v)||_{H^m} \leqslant L_{C_1}||u-v||_{H^{m+2}}$$

sempre que

$$||u||_{H^{m+2}} \leqslant C_1 \;\; e \;\; ||v||_{H^{m+2}} \leqslant C_1, \, com \;\; C_1 > 0 \;\; e \;\; L_{C_1} = L(C_1) > 0.$$

Demonstração: Usando a norma equivalente à norma de Sobolev, temos

$$||N(u) - N(v)||^2_{H^m} = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^m |\widehat{N}(u) - \widehat{N}(v)|^2 d\xi$$

onde $\widehat{N}$ é a transformada de Fourier de N e $\xi = (\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n) \in \mathbb{R}^n$.

Utilizando a desigualdade triangular obtemos que

$$\begin{aligned} | &\quad \widehat{N}(u) - \widehat{N}(v)| \\ = &\quad \left|-M\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx\right)|\xi|^2\widehat{u} + M\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^2 dx\right)|\xi|^2\widehat{v}\right| \\ \leqslant &\quad M\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2|\widehat{u}|^2 d\xi\right) |-|\xi|^2\widehat{u} + |\xi|^2\widehat{v}| \\ + &\quad \left|-M\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2|\widehat{u}|^2 d\xi\right) + M\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2|\widehat{v}|^2 d\xi\right)\right| |\xi|^2|\widehat{v}| \\ \leqslant &\quad M\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2|\widehat{u}|^2 d\xi\right) |\xi|^2|\widehat{u} - \widehat{v}| \\ + &\quad \left|-M\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2|\widehat{u}|^2 d\xi\right) + M\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2|\widehat{v}|^2 d\xi\right)\right| |\xi|^2|\widehat{v}|. \end{aligned}$$

Como por hipótese $M \in C^1(\mathbb{R}^+)$, o teorema do Valor Médio nos garante que existe $\chi \in (0,C_1)$ tal que

$$\begin{aligned} - &\quad M\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2|\widehat{u}|^2 d\xi\right) + M\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2|\widehat{v}|^2 d\xi\right) \\ = &\quad M'(\chi)\int_{\mathbb{R}^n} \left(|\xi|^2|\widehat{v}|^2 - |\xi|^2|\widehat{u}|^2\right) d\xi. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} &\left|-M\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2|\widehat{u}|^2 d\xi\right) + M\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2|\widehat{v}|^2 d\xi\right)\right| \\ &\leqslant \max_{0\leqslant s\leqslant C_1} |M'(s)| \left|\int_{\mathbb{R}^n} \left(|\xi|^2|\widehat{u}|^2 - |\xi|^2|\widehat{v}|^2\right) d\xi\right|. \end{aligned}$$

Segue das estimativas anteriores que

$$\begin{aligned} | &\quad \widehat{N}(u) - \widehat{N}(v)| \leqslant M\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2|\widehat{u}|^2 d\xi\right) |\xi|^2|\widehat{u} - \widehat{v}| \\ + &\quad \max_{0\leqslant s\leqslant C_1} |M'(s)| \left|\int_{\mathbb{R}^n} \left(|\xi|^2|\widehat{u}|^2 - |\xi|^2|\widehat{v}|^2\right) d\xi\right| |\xi|^2|\widehat{v}|. \end{aligned}$$

Utilizando a desigualdade de Hölder e a desigualdade triangular obtemos

$$\begin{aligned} &\left|\int_{\mathbb{R}^n} \left(|\xi|^2|\widehat{u}|^2 - |\xi|^2|\widehat{v}|^2\right) d\xi\right| \\ &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} (|\xi||\widehat{u}| + |\xi||\widehat{v}|)(|\xi||\widehat{u}| - |\xi||\widehat{v}|) d\xi\right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \leqslant &\quad \left(\int_{\mathbb{R}^n} (|\xi||\widehat{u}| + |\xi||\widehat{v}|)^2 d\xi\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (|\xi||\widehat{u}| - |\xi||\widehat{v}|)^2 d\xi\right)^{1/2} \\ \leqslant &\quad \left(\int_{\mathbb{R}^n} (|\xi||\widehat{u}| + |\xi||\widehat{v}|)^2 d\xi\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2|\widehat{u} - \widehat{v}|^2 d\xi\right)^{1/2} \\ = &\quad \sqrt{2}(||u||_{H^2} + ||v||_{H^2})||u-v||_{H^{m+2}} \\ = &\quad 2\sqrt{2}C_1||u-v||_{H^{m+2}}. \end{aligned}$$

Usando os fatos anteriores, vemos que

$$|| \quad N(u) - N(v)||^2_{H^m} = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^m |\widehat{N}(u) - \widehat{N}(v)|^2 d\xi$$

$$\begin{aligned}
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^m \left(M\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\xi|^2|\widehat{u}|^2 d\xi\right)|\xi|^2|\widehat{u}-\widehat{v}|\right.\\
&+ \left.\max_{0\leqslant s\leqslant C_1}|M'(s)|2\sqrt{2}C_1||u-v||_{H^{m+2}}|\xi|^2|\widehat{v}|\right)^2 d\xi\\
&= 2\left(\max_{0\leqslant s\leqslant C_1} M(s)\right)^2 ||u-v||^2_{H^{m+2}}\\
&+ 16C_1^2\left(\max_{0\leqslant s\leqslant C_1}|M'(s)|\right)^2 ||u-v||^2_{H^{m+2}}||v||^2_{H^{m+2}}\\
&\leqslant 2\left(\max_{0\leqslant s\leqslant C_1} M(s)\right)^2 ||u-v||^2_{H^{m+2}}\\
&+ 16C_1^4\left(\max_{0\leqslant s\leqslant C_1}|M'(s)|\right)^2 ||u-v||^2_{H^{m+2}}.
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
|| \quad & N(u)-N(v)||_{H^m} \leqslant \sqrt{2}\left(\max_{0\leqslant s\leqslant C_1} M(s)\right)||u-v||_{H^{m+2}}\\
+ \quad & 4C_1^2\left(\max_{0\leqslant s\leqslant C_1}|M'(s)|\right)||u-v||_{H^{m+2}}.
\end{aligned}$$

Consideremos

$$C_2 = \max\left\{\sqrt{2}\left(\max_{0\leqslant s\leqslant C_1} M(s)\right), 4C_1^2\left(\max_{0\leqslant s\leqslant C_1}|M'(s)|\right)\right\}.$$

Segue que

$$\begin{aligned}
||N(u)-N(v)||_{H^m} &\leqslant C_2||u-v||_{H^{m+2}} + C_2||u-v||_{H^{m+2}}\\
&= C_2(1+C_1^2)||u-v||_{H^{m+2}}\\
&= L_{C_1}||u-v||_{H^{m+2}}
\end{aligned}$$

onde $L_{C_1} = C_2(1+C_1^2) > 0$. Isto conclui a demonstração do lema 1. ■

Lema 2 (Solução Local)**.** *Sejam A e $\widetilde{N}$ definidas anteriormente, onde M satisfaz a condição (2). Então se $\{u_0,u_1,\theta_0\} = U_o \in H^4\times H^2\times H^2$ existe uma única $U(t) = \{u(t),u_t(t),\theta(t)\}$ e $T_{\max} > 0$, tal que*

$$U \in C([0,T_{\max}),H^4\times H^2\times H^2)\cap C^1([0,T_{\max}),H^2\times L^2\times L^2)$$

e $U(t)$ satisfaz (3).

Demonstração: Inicialmente observamos que $\mathcal{D}(A) = H^4\times H^2\times H^2$. Sabemos do teorema 1, que A é um gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações, digamos $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ de classe C_0 em $H^2\times L^2\times L^2$.

De acordo com Pazy (1983), é suficiente mostrar que a aplicação $F: H^4\times H^2\times H^2 \to H^4\times H^2\times H^2$ definida por $F(U) = \widetilde{N}U$, com $U(t) = \begin{pmatrix} u(t)\\ v(t)\\ \theta(t)\end{pmatrix}$ é localmente Lipschitiziana. Mas isso é consequência do Lema 1. ■

Teorema 2 (Solução Global)**.** *Suponhamos que M satisfaz a condição (2). Se $\{u_0,u_1,\theta_0\} = U_0 \in H^4\times H^2\times H^2$, então o problema (3) admite uma única solução forte $U = \{u,u_t,\theta\}$ satisfazendo*

$$U \in C([0,+\infty);H^4\times H^2\times H^2)\cap C^1([0,+\infty);H^2\times L^2\times L^2).$$

Demonstração: Segue do **lema 2** que existe um par de funções $\{u,\theta\}$, com $u \in H^4, u_t \in H^2, u_{tt} \in L^2, \theta \in H^2$ e $\theta_t \in L^2$ que é solução de (3) em $[0,T_{\max})$, para algum $T_{\max} > 0$. Em outras palavras, temos existência local no intervalo maximal $[0,T_{\max})$.

Queremos mostrar que $T_{\max} = +\infty$. Suponhamos que $T_{\max} < +\infty$.

Nesse caso, por Pazy (1983) devemos ter

$$\lim_{t\to T_{\max}}(||U(t)||_{H^4\times H^2\times H^2}) = +\infty. \qquad (13)$$

Seja $0 \leqslant t < T_{\max}$. Utilizando as equações de (3) temos que

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}(u_t^2+|\Delta u|^2+u^2+\theta^2)dx + \frac{1}{2}\widehat{M}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^2dx\right)\right\}$$

$$= -\int_{\mathbb{R}^n}\theta^2 dx - \int_{\mathbb{R}^n}|\nabla\theta|^2 dx$$

onde $\widehat{M}(\lambda) = \int_0^\lambda M(s)ds \geqslant 0$. Disto segue que

$$E(t) \leqslant E(0) \quad \forall t \in [0,T_{\max})$$

onde

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}(u_t^2+|\Delta u|^2+u^2+\theta^2)dx + \frac{1}{2}\widehat{M}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^2dx\right).$$

Da estimativa acima garantimos que

$$||u||^2_{H^2} \leqslant 2E(0), \ ||u_t||^2 \leqslant 2E(0) \ \text{ e } \ ||\theta||^2 \leqslant 2E(0). \qquad (14)$$

Agora vamos considerar o funcional

$$\zeta(\xi,t) = \frac{1}{2}|\xi|^4\left(|\widehat{u_t}|^2 + (1+|\xi|^4)|\widehat{u}|^2 + |\widehat{\theta}|^2 + \mu(t)|\xi|^2|\widehat{u}|^2\right),$$

onde $\widehat{u} = \widehat{u}(\xi,t)$ e $\widehat{\theta} = \widehat{\theta}(\xi,t)$ são transformadas de Fourier das funções u e θ respectivamente e $\xi = (\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n) \in \mathbb{R}^n$.

Diferenciando $\zeta(\xi,t)$ com relação a t, obtemos

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}|\xi|^4\left(|\widehat{u_t}|^2 + (1+|\xi|^4)|\widehat{u}|^2 + |\widehat{\theta}|^2 + \mu(t)|\xi|^2|\widehat{u}|^2\right)\right\}$$

$$= \eta(t)\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\xi|^2 Re\{\widehat{u}\,\overline{\widehat{u_t}}\}d\xi\right)|\xi|^6|\widehat{u}|^2 - |\xi|^4(1+|\xi|^2)|\widehat{\theta}|^2 \quad (15)$$

onde

$$\mu(t) = M\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\xi|^2|\widehat{u}|^2 d\xi\right) \ \text{ e } \ \eta(t) = M'\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\xi|^2|\widehat{u}|^2 d\xi\right).$$

Devido a (14) sabemos que $\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^2dx \leqslant 2E(0)$ e como $M \in C^1(\mathbf{R}^+)$, podemos afirmar que M e M' são funções limitadas em $0 \leqslant t < T_{\max}$, daí em virtude da desigualdade de Hölder e o lema de Gronwall juntamente com (14) e (15) vemos que

$$\zeta(\xi,t) \leqslant \zeta(\xi,0)e^{KT_{\max}}, \qquad (16)$$

integrando (16) em $\mathbb{R}^n$ e usando o teorema de Plancherel, vamos obter que

$$||u||^2_{H^4} \leqslant C(T_{\max}),\ \ ||u_t||^2_{H^2} \leqslant C(T_{\max})\ \text{ e }\ ||\theta||^2_{H^2} \leqslant C(T_{\max}).$$

ou seja, $\{u, u_t, \theta\}$ é limitada na norma $H^4 \times H^2 \times H^2$, $\forall\, 0 \leqslant t < T_{\max}$. Mas isso contraria (13), logo $T_{\max} = +\infty$ provando a existência de solução global para o modelo (3). ∎

Resta-nos mostrar a unicidade da solução, para isso suponhamos que (3) tenha duas soluções $\{u,u_t,\theta\}$ e $\{\widetilde{u},\widetilde{u}_t,\widetilde{\theta}\}$ com os mesmos dados iniciais no tempo $t = 0$.

Então, a diferença $w = u - \widetilde{u}$ e $z = \theta - \widetilde{\theta}$ satisfaz

$$\begin{cases} w_{tt} + \Delta^2 w + w - z + \Delta z = r(t)\Delta u - s(t)\Delta\widetilde{u} \\ z_t + z - \Delta z + w_t - \Delta w_t = 0 \\ w(x,0) = 0,\ w_t(x,0) = 0,\ z(x,0) = 0 \end{cases} \tag{17}$$

onde $r(t) = M\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx\right)$ e $s(t) = M\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \widetilde{u}|^2 dx\right)$

Em (17) multiplicamos a primeira equação por w_t, a segunda por z, e integrando em $\mathbb{R}^n$, obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_{\mathbb{R}^n} (w_t^2 + |\Delta w|^2 + w^2 + z^2)dx\right\} \leqslant r(t)(\Delta u,w_t) - s(t)(\Delta\widetilde{u},w_t). \tag{18}$$

Sabemos que $E(t) \leqslant E(0),\ \forall t \geqslant 0$ disto segue que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta u|^2 dx \leqslant E(0)\ \text{ e }\ \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx \leqslant E(0)\ \forall t \geqslant 0.$$

Como $M \in C^1(\mathbb{R}^+)$, sabemos que;

$$M\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx\right) \leqslant C\ \text{ e }\ M'\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx\right) \leqslant C,\ \forall t \geqslant 0.$$

Usando as observações acima, o teorema de valor médio a desigualdade de Hölder vamos obter (raciocínio semelhante ao lema (1)) que

$$\left| M\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx\right)(\Delta u,w_t) - M\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \widetilde{u}|^2 dx\right)(\Delta\widetilde{u},w_t)\right| \leqslant \widetilde{C}(||\Delta w||^2 + ||\nabla w||^2 + ||w_t||^2).$$

Agora, por (18) deduzimos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_{\mathbb{R}^n} (w_t^2 + |\Delta w|^2 + w^2 + z^2)dx\right\} \leqslant \widetilde{C}\int_{\mathbb{R}^n} (|\Delta w|^2 + |\nabla w|^2 + w_t^2)dx.$$

Claramente

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla w|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla w \nabla w dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |\Delta w|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} |w|^2 dx,$$

combinando estas desigualdades acima temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_{\mathbb{R}^n} (w_t^2 + |\Delta w|^2 + w^2 + z^2)dx\right\} &\leqslant \widetilde{C}\int_{\mathbb{R}^n} (w_t^2 + 2|\Delta w|^2 + w^2)dx \\ &\leqslant 2\widetilde{C}\int_{\mathbb{R}^n} (w_t^2 + |\Delta w|^2 + w^2 + z^2)dx.\end{aligned}$$

O lema de Gronwall e os dados iniciais em $t = 0$ implicam que $u = \widetilde{u}, u_t = \widetilde{u}_t$ e $\theta = \widetilde{\theta},\ \forall t \geqslant 0$. O que mostra que a solução de (3) é única. ∎

3 Decaimento Exponencial

Vamos considerar o problema (3) em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$. A fim de provar nosso principal resultado vamos precisar alguns lema técnicos que são consequência das propriedades de regulariedade da solução obtida no teorema 2.

Lema 3. *Seja* $E(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} (u_t^2 + |\Delta u|^2 + u^2 + \theta^2)dx + \frac{1}{2}\widehat{M}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx\right)$ *com* $\widehat{M}(\lambda) = \int_0^\lambda M(s)ds$*, a energia associada ao modelo (3) onde* $\{u,u_t,\theta\}$ *é solução global obtida no teorema 2. Então*

$$\frac{d}{dt}\{E(t)\} = -\int_{\mathbb{R}^n} \theta^2 dx - \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\theta|^2 dx.$$

Demonstração: Temos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\{E(t)\} &= \int_{\mathbb{R}^n} (u_t u_{tt} + \Delta u \Delta u_t + u u_t + \theta\theta_t)\, dx \\ &+\ M\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx\right)\int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \nabla u_t\, dx.\end{aligned}$$

Das equações do modelo (3) vemos que

$$u_{tt} = -\Delta^2 u - u + a(t)\Delta u + \theta - \Delta\theta\ \text{ e }\ \theta_t = \Delta\theta - \theta - u_t + \Delta u_t.$$

Substituindo essas identidades na derivada anterior e usando as fórmulas de Green obtemos

$$\frac{d}{dt}\{E(t)\} = -\int_{\mathbb{R}^n} \theta^2 dx - \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\theta|^2 dx.$$

∎

Lema 4. *Sejam $\varepsilon > 0$ e $\{u,u_t,\theta\}$ a solução do problema (3) obtida no teorema 2. Definimos*

$$R(t) = \varepsilon S(t) + \frac{\varepsilon}{2}T(t)$$

onde

$$S(t) = \int_{\mathbb{R}^n} u_t (I-\Delta)^{-1}\theta dx\ \ e\ \ T(t) = \int_{\mathbb{R}^n} u u_t dx.$$

Então

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\{R(t)\} &= -\frac{\varepsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^n} u_t^2 dx - \varepsilon\int_{\mathbb{R}^n} \Delta^2 u (I-\Delta)^{-1}\theta dx \\ &-\ \varepsilon\int_{\mathbb{R}^n} u(I-\Delta)^{-1}\theta dx + \varepsilon a(t)\int_{\mathbb{R}^n} \Delta u(I-\Delta)^{-1}\theta dx \\ &+\ \varepsilon\int_{\mathbb{R}^n} \theta(I-\Delta)^{-1}\theta dx - \varepsilon\int_{\mathbb{R}^n} \Delta\theta(I-\Delta)^{-1}\theta dx\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rl} - & \frac{\varepsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^n}|\Delta u|^2dx - \frac{\varepsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^n}u^2dx - \varepsilon\int_{\mathbb{R}^n}u_t\theta dx \\ - & \frac{\varepsilon}{2}a(t)\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^2dx + \frac{\varepsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^n}u\theta dx - \frac{\varepsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^n}u\Delta\theta dx. \end{array}$$

Aqui $(I-\Delta)^{-1}$ *denota a inversa do operador* $I-\Delta : H^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ *e como definimos anteriormente* $a(t) = M\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^2dx\right)$.

Demonstração: Temos que

$$\begin{array}{rcl} \frac{d}{dt}\{S(t)\} & = & \frac{d}{dt}\left\{\int_{\mathbb{R}^n}u_t(I-\Delta)^{-1}\theta dx\right\} \\ & = & \int_{\mathbb{R}^n}u_{tt}(I-\Delta)^{-1}\theta dx \\ & + & \int_{\mathbb{R}^n}u_t\frac{d}{dt}\{(I-\Delta)^{-1}\theta\}dx. \end{array} \tag{19}$$

Da segunda equação de (3) temos que

$$\begin{array}{rcl} \theta_t & = & -\theta - u_t + \Delta\theta + \Delta u_t \\ & = & -(\theta+u_t) + \Delta(\theta+u_t) \\ & = & -(I-\Delta)(\theta+u_t) \end{array}$$

logo

$$\frac{d}{dt}\{(I-\Delta)^{-1}\theta\} = -\theta - u_t. \tag{20}$$

]

Multiplicando a primeira equação de (3) por $(I-\Delta)^{-1}\theta$ e integrando sobre $\mathbb{R}^n$ obtemos

$$\begin{array}{rcl} \int_{\mathbb{R}^n}u_{tt}(I-\Delta)^{-1}\theta dx & = & -\int_{\mathbb{R}^n}\Delta^2u(I-\Delta)^{-1}\theta dx \\ & - & \int_{\mathbb{R}^n}u(I-\Delta)^{-1}\theta dx \\ & + & a(t)\int_{\mathbb{R}^n}\Delta u(I-\Delta)^{-1}\theta dx \\ & + & \int_{\mathbb{R}^n}\theta(I-\Delta)^{-1}\theta dx \\ & - & \int_{\mathbb{R}^n}\Delta\theta(I-\Delta)^{-1}\theta dx. \end{array} \tag{21}$$

Substituindo (20) e (21) em (19), concluímos que

$$\begin{array}{rcl} \frac{d}{dt}\{S(t)\} & = & -\int_{\mathbb{R}^n}\Delta^2u(I-\Delta)^{-1}\theta dx - \int_{\mathbb{R}^n}u(I-\Delta)^{-1}\theta dx \\ & + & a(t)\int_{\mathbb{R}^n}\Delta u(I-\Delta)^{-1}\theta dx + \int_{\mathbb{R}^n}\theta(I-\Delta)^{-1}\theta dx \\ & - & \int_{\mathbb{R}^n}\Delta\theta(I-\Delta)^{-1}\theta dx \\ & - & \int_{\mathbb{R}^n}u_t\theta dx - \int_{\mathbb{R}^n}u_t^2dx. \end{array} \tag{22}$$

Agora observe que, multiplicando a primeira equação de (3) por u e integrando em $\mathbb{R}^n$, tem-se

$$\begin{array}{rcl} \int_{\mathbb{R}^n}uu_{tt}dx & = & -\int_{\mathbb{R}^n}u\Delta^2udx - \int_{\mathbb{R}^n}u^2dx + a(t)\int_{\mathbb{R}^n}u\Delta udx \\ & + & \int_{\mathbb{R}^n}u\theta dx - \int_{\mathbb{R}^n}u\Delta\theta dx \\ & = & -\int_{\mathbb{R}^n}|\Delta u|^2dx - \int_{\mathbb{R}^n}u^2dx - a(t)\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^2dx \\ & + & \int_{\mathbb{R}^n}u\theta dx - \int_{\mathbb{R}^n}u\Delta\theta dx. \end{array}$$

Desta observação segue que

$$\begin{array}{rcl} \frac{d}{dt}\{T(t)\} & = & \int_{\mathbb{R}^n}u_t^2dx + \int_{\mathbb{R}^n}uu_{tt}dx \\ & = & \int_{\mathbb{R}^n}u_t^2dx - \int_{\mathbb{R}^n}|\Delta u|^2dx - \int_{\mathbb{R}^n}u^2dx \\ & - & a(t)\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^2dx \\ & + & \int_{\mathbb{R}^n}u\theta dx - \int_{\mathbb{R}^n}u\Delta\theta dx. \end{array} \tag{23}$$

Combinando (22) e (23), segue o resultado. ■

Lema 5. *Sejam* $\varepsilon > 0$, $\{u,u_t,\theta\}$ *a solução do problema (3) obtida no teorema 2 e* $R(t)$ *definida no lema anterior. Então existe uma constante* $k = k((E(0))$, *tal que*

$$\begin{array}{rcl} \frac{d}{dt}\{R(t)\} & \leqslant & -\frac{\varepsilon}{4}\int_{\mathbb{R}^n}u_t^2dx - \frac{\varepsilon}{8}\int_{\mathbb{R}^n}|\Delta u|^2dx - \frac{\varepsilon}{8}\int_{\mathbb{R}^n}u^2dx \\ & - & \frac{\varepsilon}{2}a(t)\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^2dx + k\varepsilon\int_{\mathbb{R}^n}\theta^2dx,\ \forall t \geqslant 0. \end{array}$$

Demonstração: Sabemos do lema anterior

$$\begin{array}{rcl} \frac{d}{dt}\{R(t)\} & = & -\frac{\varepsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^n}u_t^2dx - \frac{\varepsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^n}|\Delta u|^2dx - \frac{\varepsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^n}u^2dx \\ & - & \frac{\varepsilon}{2}a(t)\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^2dx + A_1(t) + A_2(t) \\ & + & A_3(t) + A_4(t) \end{array} \tag{24}$$

onde

$A_1(t) = -\varepsilon\int_{\mathbb{R}^n}\Delta^2u(I-\Delta)^{-1}\theta dx - \varepsilon\int_{\mathbb{R}^n}\Delta\theta(I-\Delta)^{-1}\theta dx$

$A_2(t) = \varepsilon a(t)\int_{\mathbb{R}^n}\Delta u(I-\Delta)^{-1}\theta dx$

$A_3(t) = -\varepsilon\int_{\mathbb{R}^n}u(I-\Delta)^{-1}\theta dx + \varepsilon\int_{\mathbb{R}^n}\theta(I-\Delta)^{-1}\theta dx$

$A_4(t) = \frac{\varepsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^n}u\theta dx - \frac{\varepsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^n}u\Delta\theta dx - \varepsilon\int_{\mathbb{R}^n}u_t\theta dx.$

O próximo passo é limitar os termos $A_j(t),\ 1 \leqslant j \leqslant 4$. De fato, utilizando a desigualdade de Hölder

$$\begin{array}{rcl} A_1(t) & \leqslant & |A_1|(t) \\ & = & \left|-\varepsilon\int_{\mathbb{R}^n}\Delta^2u(I-\Delta)^{-1}\theta dx - \varepsilon\int_{\mathbb{R}^n}\Delta\theta(I-\Delta)^{-1}\theta dx\right| \\ & \leqslant & \frac{\varepsilon}{4}||\Delta u||^2 + \frac{3\varepsilon}{2}||(I-\Delta)^{-1}\theta||_{H^2}^2 + \frac{\varepsilon}{2}||\theta||^2, \end{array}$$

usando a identidade

$$||(I-\Delta)^{-1}\theta||_{H^2}^2 = ||\theta||^2,\ \forall\theta \in L^2. \tag{25}$$

Segue que

$$A_1(t) \leqslant \frac{\varepsilon}{4}||\Delta u||^2 + 2\varepsilon||\theta||^2. \tag{26}$$

Para estimar $A_2(t)$, observamos que $\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^2dx \leqslant 2E(0)$ e como $M \in C^1(\mathbb{R}^+)$ podemos afirmar que

$$a(t) = M\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^2dx\right) \leqslant \max_{0\leqslant s\leqslant E(0)} M(s) = M(E(0)) = d \in \mathbb{R}^+.$$

Usando a majoração anterior e (25) deduzimos que

$$\begin{aligned} A_2(t) &\leqslant \varepsilon a(t)\int_{\mathbb{R}^n}|u||\Delta(I-\Delta)^{-1}\theta|dx \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{8}||u||^2+2\varepsilon d^2||\theta||^2 \qquad (27)\end{aligned}$$

No caso de $A_3(t)$ usando (25), deduzimos que

$$\begin{aligned} A_3(t) &\leqslant \frac{\varepsilon}{8}||u||^2+\frac{5\varepsilon}{2}||(I-\Delta)^{-1}\theta||^2_{H^2}+\frac{\varepsilon}{2}||\theta||^2 \\ &= \frac{\varepsilon}{8}||u||^2+\frac{5\varepsilon}{2}||\theta||^2+\frac{\varepsilon}{2}||\theta||^2 \\ &= \frac{\varepsilon}{8}||u||^2+3\varepsilon||\theta||^2. \qquad (28)\end{aligned}$$

Finalmente da desigualdade de Hölder vemos que

$$\begin{aligned} A_4(t) &\leqslant \frac{\varepsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^n}|u||\theta|dx+\frac{\varepsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^n}|\Delta u||\theta|dx+\varepsilon\int_{\mathbb{R}^n}|u_t||\theta|dx \\ &= \frac{\varepsilon}{8}||u||^2+2\varepsilon||\theta||^2+\frac{\varepsilon}{8}||\Delta u||^2+\frac{\varepsilon}{4}||u_t||^2. \qquad (29)\end{aligned}$$

Portanto, ponhamos $k=7+2d^2$ e combinamos (24) com as desigualdades (26)-(29) completa-se a demonstração do Lema 5. ∎

Lema 6. *Sejam $0<\varepsilon\leqslant 1/3$ e $H(t)=E(t)+R(t)$, com $E(t)$ e $R(t)$ definidos nos lemas 3 e 4, respectivamente. Então*

$$\frac{1}{2}E(t)\leqslant H(t)\leqslant\frac{3}{2}E(t),\ \forall t\geqslant 0.$$

Demonstração: Usando a desigualdade de Hölder e Young obtemos

$$\begin{aligned} |S(t)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n}u_t(I-\Delta)^{-1}\theta dx\right| \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}|u_t|^2dx+\frac{1}{2}||\theta||^2\leqslant E(t). \qquad (30)\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} |T(t)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n}uu_tdx\right| \\ &\leqslant \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}|u|^2dx+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}|u_t|^2dx\leqslant E(t). \qquad (31)\end{aligned}$$

A desigualdade triangular juntamente com (30) e (31) garante que

$$|R(t)|\leqslant\varepsilon|S(t)|+\frac{\varepsilon}{2}|T(t)|\leqslant\frac{3\varepsilon}{2}E(t).$$

Consequentemente,

$$-\frac{3\varepsilon}{2}E(t)\leqslant R(t)\leqslant\frac{3\varepsilon}{2}E(t).$$

Somando $E(t)$ nas desigualdades anteriores obtemos

$$E(t)-\frac{3\varepsilon}{2}E(t)\leqslant E(t)+R(t)\leqslant E(t)+\frac{3\varepsilon}{2}E(t).$$

Como $H(t)=E(t)+R(t)$, segue da estimativa anterior que

$$(1-\frac{3\varepsilon}{2})E(t)\leqslant H(t)\leqslant(1+\frac{3\varepsilon}{2})E(t).$$

Portanto, para $0<\varepsilon\leqslant 1/3$ garantimos que

$$\frac{1}{2}E(t)\leqslant H(t)\leqslant\frac{3}{2}E(t),\ \forall t\geqslant 0.$$

∎

Lema 7. *Sejam $\varepsilon>0$ e $H(t)$ definida no lema anterior, então*

$$\frac{d}{dt}\{H(t)\}\leqslant-\frac{\varepsilon}{8}E(t),\ \forall t\geqslant 0,$$

para algum $\varepsilon>0$, satisfazendo $\varepsilon k\leqslant 1/2$ onde k é a constante definida no lema 5.

Demonstração: Do lema 3 e do lema 4 vemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\{H(t)\} &= \frac{d}{dt}\{E(t)\}+\frac{d}{dt}\{R(t)\} \\ &\leqslant (-1+\varepsilon k)\int_{\mathbb{R}^n}\theta^2dx-\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla\theta|^2dx-\frac{\varepsilon}{4}\int_{\mathbb{R}^n}u_t^2dx \\ &- \frac{\varepsilon}{8}\int_{\mathbb{R}^n}|\Delta u|^2dx-\frac{\varepsilon}{8}\int_{\mathbb{R}^n}u^2dx-\frac{\varepsilon}{2}a(t)\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^2dx.\end{aligned}$$

Usando a hipótese $\varepsilon\leqslant 1/2$ resulta que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\{H(t)\} &\leqslant -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}\theta^2dx-\frac{\varepsilon}{4}\int_{\mathbb{R}^n}u_t^2dx-\frac{\varepsilon}{8}\int_{\mathbb{R}^n}|\Delta u|^2dx \\ &- \frac{\varepsilon}{8}\int_{\mathbb{R}^n}u^2dx-\frac{\varepsilon}{2}a(t)\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^2dx. \qquad (32)\end{aligned}$$

Como M é uma função não decrescente e $a(t)\geqslant 0$ podemos afirmar que

$$\int_0^{\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^2dx}M(s)ds\leqslant M\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^2dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^2dx-0\right).$$

Disto segue que

$$-a(t)\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^2dx\leqslant-\int_0^{\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^2dx}M(s)ds.$$

Substituindo a desigualdade anterior em (32) e observando que $\varepsilon\leqslant\frac{1}{2}$ obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\{H(t)\} &\leqslant -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}\theta^2dx-\frac{\varepsilon}{4}\int_{\mathbb{R}^n}u_t^2dx-\frac{\varepsilon}{8}\int_{\mathbb{R}^n}|\Delta u|^2dx \\ &- \frac{\varepsilon}{8}\int_{\mathbb{R}^n}u^2dx-\frac{\varepsilon}{2}a(t)\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^2dx \\ &\leqslant -\varepsilon\int_{\mathbb{R}^n}\theta^2dx-\frac{\varepsilon}{4}\int_{\mathbb{R}^n}u_t^2dx-\frac{\varepsilon}{8}\int_{\mathbb{R}^n}|\Delta u|^2dx \\ &- \frac{\varepsilon}{8}\int_{\mathbb{R}^n}u^2dx-\frac{\varepsilon}{2}\int_0^{\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^2dx}M(s)ds \\ &\leqslant -\frac{\varepsilon}{8}E(t). \qquad (33)\end{aligned}$$

∎

Aplicando os resultados obtidos nos lemas acima estamos em condições de demonstrar o principal resultado desse trabalho dado abaixo:

Teorema 3. *Seja $\{u,u_t,\theta\}$ a solução do problema (3) obtida no teorema 2, com $\{u_0,u_1,\theta_0\}=U_0\in H^4\times H^2\times H^2$. Considerando que M satisfaz (2), então a energia total associada ao problema (3)*

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}(u_t^2+|\Delta u|^2+u^2+\theta^2)dx+\frac{1}{2}\widehat{M}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^2dx\right)$$

satisfaz

$$E(t)\leqslant 3E(0)e^{(-\gamma t)},\ \forall t\geqslant 0$$

onde $\widehat{M}(\lambda)=\int_0^\lambda M(s)ds$ e γ é uma constante positiva dependendo somente da energia inicial.

Demonstração: De acordo com os lemas 6 e 7 temos

$$\frac{d}{dt}\{H(t)\} \leqslant -\frac{\varepsilon}{8}E(t) \quad \text{e} \quad H(t) \leqslant \frac{3}{2}E(t), \ \forall t \geqslant 0.$$

Daí,

$$\frac{d}{dt}\{H(t)\} \leqslant -\frac{\varepsilon}{12}H(t). \tag{34}$$

Aplicando a lema de Gronwall em (34) concluímos que

$$H(t) \leqslant H(0)e^{\left(-\left(\frac{\varepsilon}{12}\right)t\right)}, \ \forall t \geqslant 0.$$

Da desigualdade acima e do lema 6 vemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}E(t) &\leqslant H(t) \\ &\leqslant H(0)e^{\left(-\left(\frac{\varepsilon}{12}\right)t\right)} \\ &\leqslant \frac{3}{2}E(0)e^{\left(-\left(\frac{\varepsilon}{12}\right)t\right)}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$E(t) \leqslant 3E(0)e^{\left(-\left(\frac{\varepsilon}{12}\right)t\right)}, \ \forall t \geqslant 0.$$

Considerando $\gamma = \frac{\varepsilon}{12}$ concluímos a demonstração do teorema 3. ■

Referências

Brezis, H., 2010. Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. Springer.

Denk, R., Racke, R., Shibata, Y., 2010. Local energy decay estimate of solutions to the thermoelastic plate equations in two-and three-dimensional exterior domains. Zeitschrift Fur Analysis und Ihre Anwendungen 29, Issue 1, 26–62.

Eisley, J. G., 1964. Nonlinear vibrations of beams and rectangular plates. Z. Anger. Math. Phys 15, 164–175.

Menzala, G. P., Zuazua, E., 1998. Energy decay rates for the von kármán system of thermoelastic plates. Diff. and Int. Equations 11, n.5, 755–770.

Menzala, G. P., Zuazua, E., 2003. On the energy decay rate for the modified von kármán system of thermoelastic plates. an improvement. Applied Mathematics Letters 16 4, 531–534.

Pazy, A., 1983. Semigroups of linear operators and aapplication to partial differential equations. Springer-Verlag, New York.