Ciência e Natura, Santa Maria, v. 36 Ed. Especial II, 2014, p. 341–349
Revista do Centro de Ciências Naturais e Exatas - UFSM
ISSN impressa: 0100-8307 ISSN on-line: 2179-460X

CIÊNCIA e NATURA 35 anos

Existência e Unicidade de Solução para um Sistema de Equações de Maxwell num Meio Condutor Perfeito

Existence and Uniqueness of Solution for a System of Maxwell's Equations in a Perfect Conductor Medium

Marcos Teixeira Alves*[1], Marcio Violante Ferreira[2]

[1]Programa de Programa de Pós-Graduação em Matemática e Matemática Aplicada , Universidade Federal do Paraná, PR, Brasil.
[2]Departamento de Matemática, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, Brasil.

Resumo

Investigamos, neste trabalho, questões relacionadas à existência e unicidade de solução para um sistema de equações de Maxwell num meio condutor perfeito. Esse estudo será baseado na caracterização dos espaços funcionais de origem eletromagnética e na aplicação da teoria de Semigrupos de operadores lineares. Apresentamos resultados de existência de solução utilizando técnicas distintas daquelas usadas por outros autores.

Palavras-chave: *Espaços funcionais em eletromagnetismo, Operador de Maxwell, Equações de Maxwell, Semigrupos de operadores lineares*

Abstract

We investigate, in this paper, questions related to existence and uniqueness of solution for a system of Maxwell's equations in a perfect conductor medium. This study will be based on the characterization of the functional spaces of electromagnetic origin and application of the theory of semigroups of linear operators. We present results of existence of solution using different techniques from those used by other authors.

Keywords: *Functional spaces in electromagnetism, Maxwell Operator, Maxwell's Equations, Semigroups of linear operators*

*mtmarcos@gmail.com

Recebido: 15/01/2014 Aceito: 08/04/2014

1 Introdução

Em 1873, James Clerk Maxwell fundou a teoria moderna do eletromagnetismo com a publicação de sua obra Treatise on Eletricity and Magnetism, reunindo um conjunto de equações que atualmente levam seu nome. Estas equações, em sua forma diferencial, são, conforme Landau e Lifshitz (1960),

$$\frac{\partial D}{\partial t} - \nabla \times H = -J, \tag{1}$$
$$\frac{\partial B}{\partial t} + \nabla \times E = 0, \tag{2}$$
$$\nabla \cdot D = \rho, \tag{3}$$
$$\nabla \cdot B = 0, \tag{4}$$

em que $E = E(x,t)$, $H = H(x,t)$, $D = D(x,t)$ e $B = B(x,t)$ são funções vetoriais que dependem da posição $x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$ e do tempo $t \geq 0$. As funções E e H são os campos elétrico e magnético, respectivamente, enquanto D e B denotam as induções elétrica e magnética, respectivamente. Ainda, ρ representa a densidade de carga elétrica e J a densidade de corrente.

A partir das equações (1) e (3), relacionamos as densidades ρ e J através da equação

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot J = 0,$$

conhecida como *equação da conservação da eletricidade*.

Dada a complexidade do sistema (1)-(4) e de nosso interesse por modelos eletromagnéticos aplicados a condutores perfeitos, adotaremos as seguintes leis constitutivas:

$$J = \sigma E,\ D = \varepsilon E \text{ e } B = \mu H,$$

em que σ representa a condutividade do meio material, ε representa a permissividade e μ representa a permeabilidade magnética do meio.

Na ausência de cargas elétricas ($J = 0$ e $\rho = 0$) e adotando $\varepsilon = \mu = 1$, obtemos o seguinte *sistema de equações de Maxwell*:

$$\frac{\partial E}{\partial t} - \nabla \times H = 0,$$
$$\frac{\partial H}{\partial t} + \nabla \times E = 0,$$
$$\nabla \cdot E = 0,$$
$$\nabla \cdot H = 0.$$

No instante $t = 0$, supomos que $E(x,0) = E_0(x)$ e $H(x,0) = H_0(x)$ sejam conhecidos. Consideramos Ω uma região do espaço $\mathbb{R}^3$ representando um meio condutor perfeito e Γ sua fronteira. Neste caso, são fisicamente relevantes as condições de contorno

$$E \times \eta|_\Gamma = 0 \text{ e } H \cdot \eta|_\Gamma = 0,$$

em que $\eta(x) = (\eta_1(x),\eta_2(x),\eta_3(x))$ denota o vetor normal unitário exterior a Ω em $x \in \Gamma$.

Sob essas hipóteses, nossa meta nesse texto será discutir questões relacionadas a existência e unicidade de solução para o seguinte sistema de equações de Maxwell num meio condutor perfeito[1]

$$E_t - \nabla \times H = 0 \text{ em } \Omega \times (0,+\infty), \tag{5}$$
$$H_t + \nabla \times E = 0 \text{ em } \Omega \times (0,+\infty), \tag{6}$$
$$E(x,0) = E_0(x) \text{ e } H(x,0) = H_0(x) \text{ em } \Omega, \tag{7}$$
$$\eta \times E = 0 \text{ sobre } \Gamma \times (0,+\infty), \tag{8}$$
$$\eta \cdot H = 0 \text{ sobre } \Gamma \times (0,+\infty), \tag{9}$$
$$\nabla \cdot E = \nabla \cdot H = 0 \text{ em } \Omega \times (0,+\infty). \tag{10}$$

Sistemas de equações semelhantes ao apresentado acima foram estudados por diversos autores. Nicaise (2000) e Nicaise e Pignotti (2005), por exemplo, obtiveram a controlabilidade exata e a estabilização interna das equações de Maxwell num meio heterogêneo. Já em Ferreira e Menzala (2007), os autores obtiveram a estabilização da solução de um sistema elasto-eletromagnético não-linear em domínios exteriores. Yin (2006) prova a existência de solução fraca de um sistema de equações de Maxwell com efeitos térmicos. Cabe salientar que em todos os trabalhos citados acima as condições de fronteira são distintas das que aparecem em (8) e (9) (consideram, em geral, apenas uma delas), bem como a condição (10). Em Dautray e Lions (1990) os autores apresentam um estudo sobre o sistema completo (5)-(10), mas suas técnicas, no entanto, são distintas das que apresentamos neste trabalho.

Observemos que nos problemas de eletromagnetismo, em particular no modelo descrito acima, intervêm essencialmente os operadores diferenciais vetoriais de primeira ordem Divergente e Rotacional. Assim, torna-se natural adotarmos os espaços das funções de $[L^2(\Omega)]^3$ cujo divergente ou rotacional são funções de $L^2(\Omega)$ e $[L^2(\Omega)]^3$, respectivamente, como quadro funcional para o estudo desses fenômenos. A caracterização destes espaços e algumas de suas propriedades topológicas são apresentadas na Seção 2.

Na Seção 3, demonstramos um resultado de existência e unicidade de solução para o sistema de equações (5)-(10). Tratamos de apresentar uma nova abordagem para essa prova, recorrendo à descrição do operador adjunto do "Operador de Maxwell" $\mathcal{A}$ e da aplicação do Teorema de Stone.

As referências encerram o texto.

[1] Um condutor perfeito é um meio fictício tal que $\sigma \to +\infty$. No interior de um condutor perfeito, o campo é nulo. Metais são materiais que aproximam-se deste conceito.

2 Espaços Funcionais em Eletromagnetismo

Nesta seção introduziremos os espaços funcionais que surgem quando se estudam problemas de origem eletromagnética. Iniciaremos apresentando os operadores diferenciais lineares Gradiente, Divergente e Rotacional e suas propriedades de nosso interesse. Em seguida, definiremos os espaços de Hilbert $H(div,\Omega)$ e $H(rot,\Omega)$, consistindo de funções $u \in [L^2(\Omega)]^3$ tais que $\nabla \cdot u \in L^2(\Omega)$ e $\nabla \times u \in [L^2(\Omega)]^3$, respectivamente, e exibiremos resultados de traço para estes espaços.

A última subseção é dedicada ao estudo dos subespaços $H(div\ 0,\Omega)$ e $H_0(div\ 0,\Omega)$ de $[L^2(\Omega)]^3$. Como veremos, os resultados de densidade obtidos nestes espaços são essenciais para a busca de existência e unicidade de solução do sistema de equações de Maxwell num meio condutor perfeito.

As demonstrações dos vários fatos enunciados nesta seção podem ser encontradas em Dautray e Lions (1990), Monk (2003) e Girault e Raviart (1986). Todas elas são apresentadas, também, de forma detalhada, em Alves (2012).

2.1 Os espaços $H(div,\Omega)$ e $H(rot,\Omega)$ e resultados de traço

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^3$. Para todo $v \in \mathcal{D}'(\Omega)$ (espaço das distribuições sobre Ω), definimos o operador diferencial linear

$$\nabla v = \left(\frac{\partial v}{\partial x_1},\frac{\partial v}{\partial x_2},\frac{\partial v}{\partial x_3}\right)$$

chamado *gradiente* de v.

Dado $v = (v_1,v_2,v_3) \in [\mathcal{D}'(\Omega)]^3$, definimos o operador diferencial linear

$$\nabla \cdot v = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$$

chamado *divergente* de v.

Além destes, o operador diferencial linear *rotacional* é dado por

$$\nabla \times v = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3},\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1},\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)$$

para todo $v = (v_1,v_2,v_3) \in [\mathcal{D}'(\Omega)]^3$.

Proposição 2.1. *Os operadores gradiente, divergente e rotacional satisfazem as seguintes propriedades:*

a) $\nabla \times (\nabla v) = 0$, $\forall\, v \in \mathcal{D}'(\Omega)$;

b) $\nabla \cdot (\nabla \times v) = 0$, $\forall\, v \in [\mathcal{D}'(\Omega)]^3$;

c) $\langle \nabla \cdot v,\varphi\rangle = \langle v,-\nabla\varphi\rangle$, $\forall\, v \in [\mathcal{D}'(\Omega)]^3$ *e* $\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$;

d) Para toda $v \in [\mathcal{D}'(\Omega)]^3$ *e para toda* $\varphi \in [\mathcal{D}(\Omega)]^3$*, tem-se* $\langle \nabla \times v,\varphi\rangle = \langle v,\nabla \times \varphi\rangle$;

e) Para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ *e para toda* $u \in [\mathcal{D}'(\Omega)]^3$*, tem-se* $\nabla \cdot (\varphi u) = (\nabla\varphi) \cdot u + \varphi(\nabla \cdot u)$;

f) Para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ *e para toda* $u \in [\mathcal{D}'(\Omega)]^3$*, tem-se* $\nabla \times (\varphi u) = \varphi \cdot (\nabla \times u) + (\nabla\varphi) \times u$;

g) $\nabla \cdot (u \times v) = v \cdot (\nabla \times u) - u \cdot (\nabla \times v)$*, quaisquer que sejam* $u,v \in [\mathcal{D}'(\Omega)]^3$.

Uma vez que utilizaremos com frequência os espaços $L^2(\Omega)$ e $[L^2(\Omega)]^3 = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$, denotaremos o produto interno nestes espaços, indistintamente, por $(\ ,\ )$, o que não gera confusão. Assim,

$$(u,v) = \int_\Omega uv\, dx,$$

se $u,v \in L^2(\Omega)$ e

$$(u,v) = \int_\Omega u \cdot v\, dx = \sum_{j=1}^{3} \int_\Omega u_j v_j\, dx,$$

se $u = (u_1,u_2,u_3),v = (v_1,v_2,v_3) \in [L^2(\Omega)]^3$. A norma nestes espaços será denotada $||\cdot||$, ou seja,

$$||v|| = \left(\int_\Omega |v|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

se $v \in L^2(\Omega)$ e

$$||v|| = \left(\sum_{j=1}^{3} \int_\Omega |v_j|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

se $v = (v_1,v_2,v_3) \in [L^2(\Omega)]^3$.

O espaço vetorial real das funções $v \in [L^2(\Omega)]^3$ tais que $\nabla \cdot v \in L^2(\Omega)$ será denotado por $H(div,\Omega)$, isto é,

$$H(div,\Omega) := \{v \in [L^2(\Omega)]^3;\ \nabla \cdot v \in L^2(\Omega)\}.$$

Proposição 2.2. *O espaço* $H(div,\Omega)$ *é um espaço de Hilbert com o produto interno*

$$(u,v)_{H(div,\Omega)} = (u,v) + (\nabla \cdot u,\nabla \cdot v),\ \forall\, u,v \in H(div,\Omega).$$

Já o espaço vetorial real das funções $v \in [L^2(\Omega)]^3$ tais que $\nabla \times v \in [L^2(\Omega)]^3$ é denotado por $H(rot,\Omega)$, ou seja,

$$H(rot,\Omega) := \{v \in [L^2(\Omega)]^3;\ \nabla \times v \in [L^2(\Omega)]^3\}.$$

Proposição 2.3. *O espaço* $H(rot,\Omega)$ *é um espaço de Hilbert com o produto interno*

$$(u,v)_{H(rot,\Omega)} = (u,v) + (\nabla \times u,\nabla \times v),\ \forall\, u,v \in H(rot,\Omega).$$

Denotamos por $H_0(div,\Omega)$ o fecho de $[\mathcal{D}(\Omega)]^3$ em $H(div,\Omega)$ e por $H_0(rot,\Omega)$ o fecho de $[\mathcal{D}(\Omega)]^3$ no espaço $H(rot,\Omega)$. Simbolicamente, escrevemos

$$H_0(div,\Omega) = \overline{[\mathcal{D}(\Omega)]^3}^{H(div,\Omega)}$$

e

$$H_0(rot,\Omega) = \overline{[\mathcal{D}(\Omega)]^3}^{H(rot,\Omega)}.$$

Usaremos também a notação

$$[\mathcal{D}(\overline{\Omega})]^3 = \{\varphi|_\Omega;\ \varphi \in [\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)]^3\}.$$

Nas equações (8) e (9), apresentamos as condições de contorno naturais da teoria eletromagnética. Diferentemente das condições de fronteira do tipo de Dirichlet ou de Neumann, faz-se necessário dar significado às igualdades $E \times \eta|_\Gamma = 0$ e $H \cdot \eta|_\Gamma = 0$. É claro que resultados clássicos de traço são conhecidos em espaços de Sobolev como, por exemplo, em $H^1(\Omega)$ (vide Adams (1975) ou Medeiros (2000)). Entretanto, estes resultados não podem ser aplicados aos espaços $H(div,\Omega)$ e $H(rot,\Omega)$, já que $[H^1(\Omega)]^3 \subsetneq H(div,\Omega)$ tal qual $[H^1(\Omega)]^3 \subsetneq H(rot,\Omega)$.

Os teoremas seguintes suprirão essa necessidade, além de apresentarem generalizações da fórmula de Green nos espaços $H(div,\Omega)$ e $H(rot,\Omega)$.

Teorema 2.4. *(do Traço para $H(div,\Omega)$) Seja Ω um conjunto aberto do $\mathbb{R}^3$ com fronteira Γ limitada e Lipschitz. Então*

(i) $[\mathcal{D}(\overline{\Omega})]^3$ *é denso em* $H(div,\Omega)$;

(ii) A aplicação traço,

$$\gamma_\eta : v \mapsto v \cdot \eta|_\Gamma,$$

definida em $[\mathcal{D}(\overline{\Omega})]^3$, estende-se por continuidade a uma aplicação linear, contínua e sobrejetiva, ainda denotada por γ_η, de $H(div,\Omega)$ sobre $H^{-1/2}(\Gamma)$ (aqui $\eta(x)$ denota a normal exterior unitária em $x \in \Gamma$);

(iii) Para todo $v \in H(div,\Omega)$ e para todo $\varphi \in H^1(\Omega)$ vale a identidade

$$\int_\Omega (\nabla \cdot v)\varphi\, dx + \int_\Omega v \cdot (\nabla\varphi)\, dx = \\ = \langle \gamma_\eta(v),\varphi\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma),H^{1/2}(\Gamma)}$$

conhecida como "fórmula generalizada de Green" para o espaço $H(div,\Omega)$;

(iv) O núcleo $ker(\gamma_\eta)$ da aplicação γ_η é o espaço $H_0(div,\Omega)$.

O próximo teorema dá uma condição suficiente para uma função de $H(rot,\Omega)$ pertencer a $H_0(rot,\Omega)$.

Teorema 2.5. *Seja Ω um conjunto aberto do $\mathbb{R}^3$ com fronteira Γ limitada e Lipschitz. Se $u \in H(rot,\Omega)$ é tal que*

$$(u,\nabla \times \varphi) - (\nabla \times u,\varphi) = 0,\ \forall\ \varphi \in [\mathcal{D}(\overline{\Omega})]^3, \qquad (11)$$

então $u \in H_0(rot,\Omega)$.

Com auxílio do teorema anterior, caracterizamos o traço de funções de $H(rot,\Omega)$.

Teorema 2.6. *(do Traço para $H(rot,\Omega)$) Seja Ω um conjunto aberto do $\mathbb{R}^3$ com fronteira Γ limitada e Lipschitz. Então*

(i) $[\mathcal{D}(\overline{\Omega})]^3$ *é denso em* $H(rot,\Omega)$;

(ii) A aplicação traço,

$$\gamma_\tau : v \mapsto v \times \eta|_\Gamma,$$

definida em $[\mathcal{D}(\overline{\Omega})]^3$, estende-se por continuidade a uma aplicação linear e contínua, ainda denotada por γ_τ, do espaço $H(rot,\Omega)$ em $[H^{-1/2}(\Gamma)]^3$ (aqui $\eta(x)$ denota a normal exterior unitária em $x \in \Gamma$);

(iii) Para todo $v \in H(rot,\Omega)$ e para todo $\varphi \in [H^1(\Omega)]^3$, vale a identidade

$$\int_\Omega v \cdot (\nabla \times \varphi)\, dx - \int_\Omega (\nabla \times v) \cdot \varphi\, dx = \\ = \langle \gamma_\eta(v),\varphi\rangle_{[H^{-1/2}(\Gamma)]^3,[H^{1/2}(\Gamma)]^3}$$

conhecida como "fórmula generalizada de Green" para o espaço $H(rot,\Omega)$;

(iv) O núcleo $ker(\gamma_\tau)$ da aplicação γ_τ é o espaço $H_0(rot,\Omega)$.

Via Teorema do Traço em $H(rot,\Omega)$, obtemos a "fórmula de integração"

$$\int_\Omega w \cdot (\nabla \times v)\, dx = \int_\Omega (\nabla \times w) \cdot v\, dx, \qquad (12)$$

válida para todo $w \in H_0(rot,\Omega)$ e todo $v \in H(rot,\Omega)$.

2.2 Os subespaços funcionais $H(div\ 0,\Omega)$ e $H_0(div\ 0,\Omega)$ de $[L^2(\Omega)]^3$

Tratemos agora dos subespaços funcionais $H(div\ 0,\Omega)$ e $H_0(div\ 0,\Omega)$ de $[L^2(\Omega)]^3$, de grande utilidade na busca de existência e unicidade de solução do problema eletromagnético desejado. Essencialmente, iremos utilizar o operador projeção sobre estes espaços a fim de obter resultados de densidade. Esta subseção baseia-se no trabalho de Nicaise (2000) e também fora detalhado em Alves (2012).

Tais subespaços são definidos como segue:

$$H(div\ 0,\Omega) = \{u \in [L^2(\Omega)]^3;\ \nabla \cdot u = 0\},$$
$$H_0(div\ 0,\Omega) = \{u \in [L^2(\Omega)]^3;\ \nabla \cdot u = 0 \text{ e } \eta \cdot u|_\Gamma = 0\}.$$

Como pode ser visto em Alves (2012) ou Girault e Raviart (1986), $H(div\ 0,\Omega)$ e $H_0(div\ 0,\Omega)$ são subespaços fechados de $[L^2(\Omega)]^3$. Assim, podemos escrever

$$[L^2(\Omega)]^3 = H(div\ 0,\Omega) \oplus [H(div\ 0,\Omega)]^\perp.$$

Portanto, se $u \in [L^2(\Omega)]^3$, então

$u = u_1 + u_2$ com $u_1 \in H(div\ 0,\Omega)$ e $u_2 \in [H(div\ 0,\Omega)]^\perp$.

Consideremos o operador projeção P_d de $[L^2(\Omega)]^3$ sobre $H(div\ 0,\Omega)$, isto é,

$$\begin{array}{rccc} P_d : & [L^2(\Omega)]^3 & \longrightarrow & H(div\ 0,\Omega) \\ & u & \longmapsto & P_d u = u_1. \end{array}$$

A importância deste operador reside no fato seguinte.

Proposição 2.7. *Se $u \in H_0(rot,\Omega)$, então $P_d u \in H_0(rot,\Omega)$. Em outras palavras,*

$$P_d(H_0(rot,\Omega)) \subset H_0(rot,\Omega) \cap H(div\ 0,\Omega).$$

Observação 2.8. *Se $u \in [H(div\ 0,\Omega)]^\perp$, então*

$$\langle \nabla \times u, \varphi \rangle = \langle u, \nabla \times \varphi \rangle = \int_\Omega u \cdot (\nabla \times \varphi)\ dx = 0,$$

para toda $\varphi \in [\mathcal{D}(\Omega)]^3$, posto que, obviamente, $\nabla \times \varphi \in H(div\ 0,\Omega)$. Isto mostra que $\nabla \times u = 0$. Fazendo uso da notação

$$H(rot\ 0,\Omega) = \{v \in [L^2(\Omega)]^3;\ \nabla \times v = 0\},$$

temos $u \in H(rot\ 0,\Omega)$, o que mostra que

$$[H(div\ 0,\Omega)]^\perp \subset H(rot\ 0,\Omega).$$

Mais que isso, podemos mostrar que

$$[H(div\ 0,\Omega)]^\perp \subset H_0(rot\ 0,\Omega),$$

em que

$$H_0(rot\ 0,\Omega) = \{v \in [L^2(\Omega)]^3;\ \nabla \times v = 0 \text{ e } \eta \times v|_\Gamma = 0\}.$$

Com efeito, se $u \in [H(div\ 0,\Omega)]^\perp$ então $\nabla \times u = 0$ e, para toda $\varphi \in [H^1(\Omega)]^3$,

$$\langle \gamma_\eta(u), \varphi \rangle_{[H^{-1/2}(\Gamma)]^3, [H^{1/2}(\Gamma)]^3} = \\ = \int_\Omega u \cdot (\nabla \times \varphi)\ dx - \int_\Omega (\nabla \times u) \cdot \varphi\ dx = 0.$$

Na nossa próxima proposição, usaremos o operador projeção de $[L^2(\Omega)]^3$ sobre $H_0(div\ 0,\Omega)$. Este operador será denotado por P_0, isto é,

$$\begin{array}{rccc} P_0 : & [L^2(\Omega)]^3 & \longrightarrow & H_0(div\ 0,\Omega) \\ & u & \longmapsto & P_0 u = u_1, \end{array}$$

onde $u = u_1 + u_2$, sendo $u_1 \in H_0(div\ 0,\Omega)$ e $u_2 \in [H_0(div\ 0,\Omega)]^\perp$.

Proposição 2.9. *Se $u \in H(rot,\Omega)$, então $P_0 u \in H(rot,\Omega)$, ou seja,*

$$P_0(H(rot,\Omega)) \subset H(rot,\Omega) \cap H_0(div\ 0,\Omega).$$

Observação 2.10. *Se $u \in [H_0(div\ 0,\Omega)]^\perp$, então*

$$\langle \nabla \times u, \varphi \rangle = \langle u, \nabla \times \varphi \rangle = \int_\Omega u \cdot (\nabla \times \varphi)\ dx = 0,$$

para toda $\varphi \in [\mathcal{D}(\Omega)]^3$. Tal fato ocorre pois $\nabla \times \varphi \in H_0(div\ 0,\Omega)$[1]*. Vemos, assim, que $\nabla \times u = 0$, isto é, $u \in H(rot\ 0,\Omega)$. Portanto,*

$$[H_0(div\ 0,\Omega)]^\perp \subset H(rot\ 0,\Omega).$$

Finalmente, seguem dois resultados de densidade, cujas demonstrações também podem ser encontradas em Alves (2012), que serão utilizados no decorrer da próxima seção.

Proposição 2.11. *$H_0(rot,\Omega) \cap H(div\ 0,\Omega)$ é denso no espaço $H(div\ 0,\Omega)$ (com a norma de $[L^2(\Omega)]^3$).*

Proposição 2.12. *$H(rot,\Omega) \cap H_0(div\ 0,\Omega)$ é denso no espaço $H_0(div\ 0,\Omega)$ (com a norma de $[L^2(\Omega)]^3$).*

3 Equações de Maxwell num meio condutor perfeito

Com todo o ferramental apresentado na seção anterior, estamos aptos à busca de existência e unicidade de solução para o sistema de equações de Maxwell num meio condutor perfeito estabelecido nas equações de (5) a (10).

Inicialmente, estabeleceremos uma prova da existência e unicidade de solução para o sistema (5)-(8).

Consideremos o espaço $X = [L^2(\Omega)]^3 \times [L^2(\Omega)]^3$ munido do produto interno

$$(u,v)_X = \int_\Omega (u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2)\ dx,$$

em que $u = (u_1,u_2), v = (v_1,v_2) \in X$. Segue então que X é um espaço de Hilbert.

Para estudar o sistema (5)-(8), consideramos o operador linear não-limitado

$$\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset X \to X$$

com domínio

$$D(\mathcal{A}) = \\ = \{w \in X;\ (\nabla \times w_2, -\nabla \times w_1) \in X \text{ e } w_1 \times \eta|_\Gamma = 0\}$$

e definido por

$$\mathcal{A}w = (\nabla \times w_2, -\nabla \times w_1),\ \forall\ w \in D(\mathcal{A}). \tag{13}$$

[1]Para nos convencermos disto, basta notar que, $\forall\ \psi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$, $\langle \gamma_\eta(\nabla \times \varphi), \psi \rangle = \int_\Omega \nabla \times \varphi \cdot (\nabla \psi)\ dx = \int_\Omega \varphi \cdot (\nabla \times (\nabla \psi))\ dx - \langle \gamma_\eta(\varphi), \nabla \psi \rangle = 0$.

O item (iv) do Teorema 2.6 garante que

$$H_0(rot,\Omega) = ker(\gamma_\tau) = \{v \in H(rot,\Omega);\ v \times \eta|_\Gamma = 0\}.$$

Em decorrência dessa igualdade, reescrevemos $D(\mathcal{A})$ como

$$D(\mathcal{A}) = H_0(rot,\Omega) \times H(rot,\Omega). \tag{14}$$

Observação 3.1. *O operador $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \to X$ definido em* (13) *e com domínio dado por* (14) *é chamado* ***operador de Maxwell****.*

De posse do operador de Maxwell, o problema (5)-(6), sujeito às condições iniciais e de fronteira (7) e (8), pode ser escrito na forma

$$\frac{dU}{dt}(t) = \mathcal{A}U(t) \tag{15}$$

$$U(0) = U_0 \tag{16}$$

em que $U(t) = (E(t),H(t))$ e $U_0 = (E_0,H_0)$.

Com isso, a partir de agora, estaremos interessados em garantir existência e unicidade de solução do problema de valor inicial (15)-(16). Para este fim, estudaremos as propriedades do operador $\mathcal{A}$ de nosso interesse.

Lema 3.2. *$D(\mathcal{A})$ é denso em X (com a norma de X).*

Demonstração: Da cadeia de inclusões

$$[\mathcal{D}(\Omega)]^3 \times [\mathcal{D}(\Omega)]^3 \subset D(\mathcal{A}) \subset X,$$

obtemos $\overline{D(\mathcal{A})} = X$, já que $\mathcal{D}(\Omega)$ é denso em $L^2(\Omega)$. ■

Segue do lema anterior que o operador $\mathcal{A}^*$ (Adjunto de $\mathcal{A}$) está bem definido (Veja Brezis (2010)).

Lema 3.3. *$D(\mathcal{A}) = H_0(rot,\Omega) \times H(rot,\Omega) \subset D(\mathcal{A}^*)$.*

Demonstração: Seja $v = (v_1,v_2) \in D(\mathcal{A})$. Para mostrar que $v \in D(\mathcal{A}^*)$, necessitamos garantir a existência de $g = (g_1,g_2) \in X$ tal que

$$(\mathcal{A}w,v)_X = (w,g)_X,\ \forall\ w \in D(\mathcal{A})$$

e, neste caso, $g = \mathcal{A}^*v$.

Com efeito, para todo $w = (w_1,w_2) \in D(\mathcal{A})$, temos

$$(\mathcal{A}w,v)_X = \int_\Omega (\nabla \times w_2) \cdot v_1\ dx - \int_\Omega (\nabla \times w_1) \cdot v_2\ dx. \tag{17}$$

Segue da fórmula de integração por partes dada em (12) que

$$\int_\Omega (\nabla \times w_2) \cdot v_1\ dx = \int_\Omega w_2 \cdot (\nabla \times v_1)\ dx, \tag{18}$$

uma vez que $v_1 \in H_0(rot,\Omega)$ e $w_2 \in H(rot,\Omega)$. Analogamente, visto que $w_1 \in H_0(rot,\Omega)$ e $v_2 \in H(rot,\Omega)$, ficamos com

$$\int_\Omega (\nabla \times w_1) \cdot v_2\ dx = \int_\Omega w_1 \cdot (\nabla \times v_2)\ dx. \tag{19}$$

Assim, usando (17)-(19), obtemos

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}w,v)_X &= \int_\Omega w_2 \cdot (\nabla \times v_1)\ dx - \int_\Omega w_1 \cdot (\nabla \times v_2)\ dx \\ &= ((w_1,w_2),(-\nabla \times v_2,\nabla \times v_1))_X \\ &= (w,-\mathcal{A}v)_X,\ \forall\ w \in D(\mathcal{A}).\end{aligned}$$

Vimos assim que, se $v \in D(\mathcal{A})$, existe

$$g = (-\nabla \times v_2,\nabla \times v_1) = -\mathcal{A}v$$

tal que $(\mathcal{A}w,v)_X = (w,g)_X$, $\forall\ w \in D(\mathcal{A})$, donde garantimos que $v \in D(\mathcal{A}^*)$, ou seja, $D(\mathcal{A}) \subset D(\mathcal{A}^*)$. Além disso,

$$\mathcal{A}^*v = -\mathcal{A}v,\ \forall\ v \in D(\mathcal{A}).$$

■

Em nosso próximo lema, mostraremos que é válida a inclusão contrária.

Lema 3.4. *$D(\mathcal{A}^*) \subset H_0(rot,\Omega) \times H(rot,\Omega) = D(\mathcal{A})$.*

Demonstração: Fixemos $v = (v_1,v_2) \in D(\mathcal{A}^*)$. Logo, existe $g = (g_1,g_2) \in X$ tal que

$$(\mathcal{A}w,v)_X = (w,g)_X,\ \forall\ w = (w_1,w_2) \in D(\mathcal{A}). \tag{20}$$

Escolhendo $w = (0,w_2)$, com $w_2 \in [\mathcal{D}(\Omega)]^3$, obtemos de (20) que

$$\int_\Omega \nabla \times w_2 \cdot v_1\ dx = \int_\Omega w_2 \cdot g_2\ dx,\ \forall\ w_2 \in [\mathcal{D}(\Omega)]^3$$

e, via Proposição 2.1 item d),

$$g_2 = \nabla \times v_1 \text{ em } [\mathcal{D}'(\Omega)]^3.$$

Como $g_2 \in [L^2(\Omega)]^3$, temos $v_1 \in H(rot,\Omega)$. Tomemos agora $w_1 \in [\mathcal{D}(\Omega)]^3$ e ponhamos $w = (w_1,0) \in D(\mathcal{A})$. Segue de (20) que

$$-\int_\Omega (\nabla \times w_1) \cdot v_2\ dx = \int_\Omega w_1 \cdot g_1\ dx,\ \forall\ w_1 \in [\mathcal{D}(\Omega)]^3.$$

Novamente pelo item d) da Proposição 2.1, obtemos que $g_1 = -\nabla \times v_2 \in [L^2(\Omega)]^3$. Consequentemente, $v_2 \in H(rot,\Omega)$.

Até este momento, vimos que se $v \in D(\mathcal{A}^*)$, então $v \in H(rot,\Omega) \times H(rot,\Omega)$ e o elemento $g \in X$ que satisfaz (20) é dado por $g = (-\nabla \times v_2,\nabla \times v_1)$.

Assim, para todo $w = (0,\varphi)$ com $\varphi \in [\mathcal{D}(\overline{\Omega})]^3$, temos

$$\int_\Omega (\nabla \times \varphi) \cdot v_1\ dx = \int_\Omega \varphi \cdot (\nabla \times v_1)\ dx,\ \forall\ \varphi \in [\mathcal{D}(\overline{\Omega})]^3,$$

sendo $v_1 \in H(rot,\Omega)$. O Teorema 2.5 garante que $v_1 \in H_0(rot,\Omega)$. Logo, concluímos que

$$v = (v_1,v_2) \in H_0(rot,\Omega) \times H(rot,\Omega) = D(\mathcal{A}),$$

como queríamos demonstrar. ■

Em resumo, os Lemas 3.3 e 3.4 anteriores mostram que $D(\mathcal{A}^*) = D(\mathcal{A})$ e $\mathcal{A}^* = -\mathcal{A}$. Portanto, o Teorema de Stone (A é o gerador de um grupo de operadores unitários de classe $\mathcal{C}_0$ se e somente se $A^* = -A$) garante que $\mathcal{A}$ é gerador de um grupo $\mathcal{C}_0$ de operadores unitários $\{T(t)\}$. Com o auxílio deste teorema e da teoria de semigrupos de operadores lineares (Veja Pazy (1983)), obtemos o seguinte resultado de existência e unicidade de solução:

Teorema 3.5. *Dado $(E_0,H_0) \in D(\mathcal{A})$, o problema* (5)-(8) *admite uma única solução global forte*

$$(E,H) \in \mathcal{C}([0,+\infty),D(\mathcal{A})) \cap \mathcal{C}^1([0,+\infty),X).$$

Demonstração: Uma vez que $(E_0,H_0) \in D(\mathcal{A})$, temos $T(t)(E_0,H_0) \in D(\mathcal{A})$. Definimos

$$U(t) = T(t)(E_0,H_0).$$

Daí,

$$\frac{d}{dt}U(t) = \frac{d}{dt}T(t)(E_0,H_0) = \mathcal{A}T(t)(E_0,H_0) = \mathcal{A}U(t)$$

e

$$U(0) = T(0)(E_0,H_0) = I(E_0,H_0) = (E_0,H_0).$$

Além disso, $\eta \times E = 0$, pois $(E,H) \in D(\mathcal{A})$. ∎

Iremos agora obter um resultado de existência e unicidade de solução para o sistema (5)-(10), objetivo central de nosso trabalho.

Consideremos o espaço de Hilbert

$$X = [L^2(\Omega)]^3 \times [L^2(\Omega)]^3$$

munido do produto interno apresentado anteriormente e

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \{(E,H) \in X;\ \nabla \cdot E = 0,\ \nabla \cdot H = 0,\ \eta \cdot H|_\Gamma = 0\} \\ &= H(div\ 0,\Omega) \times H_0(div\ 0,\Omega).\end{aligned}$$

Sabemos que $H(div\ 0,\Omega)$ e $H_0(div\ 0,\Omega)$ são espaços de Hilbert com o produto interno oriundo de $[L^2(\Omega)]^3$. Com isso, $\mathcal{H}$ é espaço de Hilbert.

As considerações anteriores nos levam à definição do operador $\mathcal{A}_\mathcal{H}$, restrição de $\mathcal{A}$ ao espaço $\mathcal{H}$, dado por

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_\mathcal{H} &: D(\mathcal{A}_\mathcal{H}) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H} \\ \mathcal{A}_\mathcal{H}v &= \mathcal{A}v,\ \forall\ v \in D(\mathcal{A}_\mathcal{H}),\end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned}&D(\mathcal{A}_\mathcal{H}) = D(\mathcal{A}) \cap \mathcal{H} = \\ &=[H_0(rot,\Omega) \cap H(div\ 0,\Omega)] \times [H(rot,\Omega) \cap H_0(div\ 0,\Omega)].\end{aligned}$$

Na proposição seguinte mostramos que, de fato, o operador $\mathcal{A}_\mathcal{H} : D(\mathcal{A}_\mathcal{H}) \to \mathcal{H}$ está bem definido, isto é, o operador $\mathcal{A}$ aplica $D(\mathcal{A}) \cap \mathcal{H}$ em $\mathcal{H}$.

Proposição 3.6. *$\mathcal{H}$ é um subespaço de X "estável" para o operador $\mathcal{A}$, ou seja,*

$$v \in D(\mathcal{A}) \cap \mathcal{H} \Longrightarrow \mathcal{A}v \in \mathcal{H}.$$

Demonstração: Conforme vimos na Seção 2,

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^\perp &= [H(div\ 0,\Omega)]^\perp \times [H_0(div\ 0,\Omega)]^\perp \\ &\subset H_0(rot\ 0,\Omega) \times H(rot\ 0,\Omega) \\ &= ker(\mathcal{A}) = ker(\mathcal{A}^*).\end{aligned}$$

Fixemos $v \in D(\mathcal{A}) \cap \mathcal{H}$. Então, para todo $w \in ker(\mathcal{A})$,

$$(\mathcal{A}v,w)_X = (v,\mathcal{A}^*w)_X = (v,-\mathcal{A}w)_X = (v,0)_X = 0,$$

o que mostra que $\mathcal{A}v \subset [ker(\mathcal{A})]^\perp \subset \mathcal{H}$. ∎

Como consequência da proposição anterior, vemos que é natural a definição dada anteriormente para o operador $\mathcal{A}_\mathcal{H}$.

Proposição 3.7. *$D(\mathcal{A}_\mathcal{H})$ é denso em H.*

Demonstração: Segue como consequência das Proposições 2.11 e 2.12. ∎

Devido à proposição anterior, $\mathcal{A}^*_\mathcal{H}$, o operador adjunto de $\mathcal{A}_\mathcal{H}$, está bem definido. Nossa meta agora consiste em estabelecer a caracterização de $\mathcal{A}^*_\mathcal{H}$.

Lema 3.8. *$D(\mathcal{A}_\mathcal{H}) \subset D(\mathcal{A}^*_\mathcal{H})$.*

Demonstração: Já sabemos dos Lemas 3.3 e 3.4 que

$$(\mathcal{A}u,v)_X = (u,-\mathcal{A}v)_X,\ \forall\ u,v \in D(\mathcal{A}) = D(\mathcal{A}^*).$$

Em particular, vale

$$(\mathcal{A}u,v)_X = (u,-\mathcal{A}v)_X,\ \forall\ u,v \in D(\mathcal{A}_\mathcal{H}) \subset D(\mathcal{A}),$$

ou seja,

$$(\mathcal{A}_\mathcal{H}u,v)_\mathcal{H} = (u,-\mathcal{A}_\mathcal{H}v)_\mathcal{H},\ \forall\ u,v \in D(\mathcal{A}_\mathcal{H}).$$

Daí, se $v \in D(\mathcal{A}_\mathcal{H})$, temos

$$(\mathcal{A}_\mathcal{H}u,v)_\mathcal{H} = (u,-\mathcal{A}_\mathcal{H}v)_\mathcal{H},\ \forall\ u \in D(\mathcal{A}_\mathcal{H}).$$

Disto, garantimos que $v \in D(\mathcal{A}^*_\mathcal{H})$ e $\mathcal{A}^*_\mathcal{H}v = -\mathcal{A}_\mathcal{H}v$, ou seja,

$$D(\mathcal{A}_\mathcal{H}) \subset D(\mathcal{A}^*_\mathcal{H}) \text{ e } \mathcal{A}^*_\mathcal{H}v = -\mathcal{A}_\mathcal{H}v,\ \forall\ v \in D(\mathcal{A}_\mathcal{H}).$$

∎

Lema 3.9. *$D(\mathcal{A}^*_\mathcal{H}) \subset D(\mathcal{A}_\mathcal{H})$.*

Demonstração: Seja $v = (v_1,v_2) \in D(\mathcal{A}^*_\mathcal{H}) \subset \mathcal{H}$. Logo, existe $g = (g_1,g_2) \in \mathcal{H}$ tal que

$$(\mathcal{A}_\mathcal{H}u,v)_\mathcal{H} = (u,g)_\mathcal{H},\ \forall\ u \in D(\mathcal{A}_\mathcal{H}). \tag{21}$$

Em particular, obtemos

$$(\mathcal{A}_{\mathcal{H}}u,v)_{\mathcal{H}} = (u,g)_{\mathcal{H}},\ \forall\ u \in P_d([\mathcal{D}(\Omega)]^3) \times P_0([\mathcal{D}(\Omega)]^3) \quad (22)$$

visto que $P_d([\mathcal{D}(\Omega)]^3) \times P_0([\mathcal{D}(\Omega)]^3) \subset D(\mathcal{A}_{\mathcal{H}})$ (proposições 2.7 e 2.9). Observemos que se $\varphi \in [\mathcal{D}(\Omega)]^3$, então $(0,P_0\varphi) \in D(\mathcal{A}_{\mathcal{H}})$ e, por (22), temos

$$(\mathcal{A}_{\mathcal{H}}(0,P_0\varphi),v)_{\mathcal{H}} = ((0,P_0\varphi),g)_{\mathcal{H}},\ \forall\ \varphi \in [\mathcal{D}(\Omega)]^3,$$

ou seja,

$$\int_\Omega \nabla \times (P_0\varphi) \cdot v_1\, dx = \int_\Omega (P_0\varphi) \cdot g_2\, dx, \quad (23)$$

$\forall\ \varphi \in [\mathcal{D}(\Omega)]^3$. Devido à Proposição 2.9,

$$\nabla \times (P_0\varphi) = \nabla \times \varphi \text{ e } (P_0\varphi,g_2) = (\varphi,g_2),$$

uma vez que $g_2 \in H_0(div\ 0,\Omega)$. Usando esse fato e (23), ficamos com

$$\int_\Omega (\nabla \times \varphi) \cdot v_1\, dx = \int_\Omega \varphi \cdot g_2\, dx,\ \forall\ \varphi \in [\mathcal{D}(\Omega)]^3,$$

donde obtemos que $g_2 = \nabla \times v_1$ em $[\mathcal{D}'(\Omega)]^3$. Haja visto que $g_2 \in [L^2(\Omega)]^3$, garantimos que $v_1 \in H(rot,\Omega)$.

Por outro lado, dado qualquer $\varphi \in [\mathcal{D}(\Omega)]^3$, temos $u = (P_d\varphi,0) \in D(\mathcal{A}_{\mathcal{H}})$. Consequentemente, por (22), teremos

$$(\mathcal{A}_{\mathcal{H}}(P_d\varphi,0),v)_{\mathcal{H}} = ((P_d\varphi,0),g)_{\mathcal{H}},\ \forall\ \varphi \in [\mathcal{D}(\Omega)]^3,$$

isto é,

$$\int_\Omega -\nabla \times (P_d\varphi) \cdot v_2\, dx = \int_\Omega P_d\varphi \cdot g_1\, dx,\ \forall\ \varphi \in [\mathcal{D}(\Omega)]^3,$$

ou ainda, lembrando que $g_1 \in H(div\ 0,\Omega)$ e que temos $\nabla \times (P_d\varphi) = \nabla \times \varphi$, obtemos

$$\int_\Omega -(\nabla \times \varphi) \cdot v_2\, dx = \int_\Omega \varphi \cdot g_1\, dx,\ \forall\ \in [\mathcal{D}(\Omega)]^3.$$

Desta última equação decorre que $g_1 = -\nabla \times v_2$ em $[\mathcal{D}'(\Omega)]^3$ e, como $g_1 \in [L^2(\Omega)]^3$, temos $v_2 \in H(rot,\Omega)$.

Em resumo, vimos que se $v = (v_1,v_2) \in D(\mathcal{A}^*_{\mathcal{H}})$, então

$$v \in [H(rot,\Omega) \cap H(div\ 0,\Omega)] \times [H(rot,\Omega) \cap H_0(div\ 0,\Omega)]$$

e, além disso,

$$(\mathcal{A}_{\mathcal{H}}u,v)_{\mathcal{H}} = (u,(-\nabla \times v_2,\nabla \times v_1))_{\mathcal{H}}, \quad (24)$$

$\forall\ u \in D(\mathcal{A}_{\mathcal{H}})$. Para concluir a demonstração deste lema, devemos mostrar que $v_1 \times \eta|_\Gamma = 0$. Com este intuito, usaremos (24).

Se $\varphi \in [\mathcal{D}(\overline{\Omega})]^3$, então $P_0\varphi \in H(rot,\Omega) \cap H_0(div\ 0,\Omega)$ (Proposição 2.9). Assim, $u = (0,P_0\varphi) \in D(\mathcal{A}_{\mathcal{H}})$. Desse modo, de posse de (24), escrevemos

$$(\mathcal{A}_{\mathcal{H}}(0,P_0\varphi),(v_1,v_2))_{\mathcal{H}} = ((0,P_0\varphi),(-\nabla \times v_2,\nabla \times v_1))_{\mathcal{H}},$$

para toda $\varphi \in [\mathcal{D}(\overline{\Omega})]^3$, isto é,

$$\int_\Omega \nabla \times (P_0\varphi) \cdot v_1\, dx = \int_\Omega (P_0\varphi) \cdot (\nabla \times v_1)\, dx.$$

Como $\nabla \times (P_0\varphi) = \nabla \times \varphi$ e $\nabla \times v_1 = g_2 \in H_0(div\ 0,\Omega)$, temos

$$(P_0\varphi,\nabla \times v_1) = (\varphi,\nabla \times v_1).$$

Assim,

$$\int_\Omega (\nabla \times \varphi) \cdot v_1\, dx = \int_\Omega \varphi \cdot (\nabla \times v_1)\, dx,\ \forall\ \varphi \in [\mathcal{D}(\overline{\Omega})]^3,$$

donde concluímos que $v_1 \in H_0(rot,\Omega)$ graças ao Teorema 2.5. ∎

Em decorrência dos Lemas 3.8 e 3.9 vistos anteriormente, obtemos $D(\mathcal{A}^*_{\mathcal{H}}) = D(\mathcal{A}_{\mathcal{H}})$ e $\mathcal{A}^*_{\mathcal{H}} = -\mathcal{A}_{\mathcal{H}}$. Logo, o Teorema de Stone estabelece que $\mathcal{A}_{\mathcal{H}}$ é gerador de um grupo de operadores unitários $\{T(t)\}$ de classe $\mathcal{C}_0$. Com isso, obtemos o seguinte resultado de existência e unicidade de solução para o sistema de equações de Maxwell (5)-(10), aplicado a um meio condutor perfeito:

Teorema 3.10. *Dado* $(E_0,H_0) \in D(\mathcal{A}_{\mathcal{H}})$, *existe uma única solução*

$$(E,H) \in \mathcal{C}([0,+\infty),D(\mathcal{A}_{\mathcal{H}})) \cap \mathcal{C}^1([0,+\infty),\mathcal{H})$$

do problema (5)-(10).

Demonstração: Uma vez que $(E_0,H_0) \in D(\mathcal{A}_{\mathcal{H}})$, teremos $T(t)(E_0,H_0) \in D(\mathcal{A}_{\mathcal{H}})$. Definindo

$$(E(t),H(t)) = T(t)(E_0,H_0)$$

e usando as propriedades de semigrupos de operadores lineares, obtemos o resultado desejado. ∎

4 Conclusões

No presente estudo, garantimos resultados significativos de existência e unicidade de solução para problemas específicos de origem eletromagnética. Tais resultados foram obtidos graças ao desenvolvimento e caracterização de um quadro funcional adequado para o estudo das equações de Maxwell e da aplicação da teoria de semigrupos de operadores lineares. Salientamos que as soluções obtidas pertencem a espaços mais regulares, desde que os dados iniciais pertençam ao domínio do operador de Maxwell.

Outros problemas que envolvem as equações de Maxwell podem ser estudados utilizando o ferramental desenvolvido neste trabalho. Modelos de eletromagnetismo sob efeitos térmicos, por exemplo, são um campo de estudo ainda a ser muito explorado. Também interessantes são aquelas situações em que a região Ω é um domínio exterior.

Referências

Adams, R. A., 1975. Sobolev Spaces. Academic Press.

Alves, M. T., 2012. Espaços funcionais e operadores lineares em eletromagnetismo. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Maria.

Brezis, H., 2010. Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. Springer.

Dautray, R., Lions, J. L., 1990. Mathematical analysis and numerical methods for science and technology. Vol. 3. Springer-Verlag.

Ferreira, M. V., Menzala, G. P., 2007. Uniform stabilization of an electromagnetic-elasticity problem in exterior domains. Discrete and Continuous Dynamical Systems 18 (4), 719–746.

Girault, V., Raviart, P., 1986. Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations. Theory and Algorithms. Springer-Verlag.

Landau, L. V., Lifshitz, E. M., 1960. Electrodynamics of Continuous Media. Pergamon.

Medeiros, L. A.; Miranda, M. M., 2000. Espaços de Sobolev: iniciação aos problemas elíticos não homogêneos. Rio de Janeiro.

Monk, P., 2003. Finite Element Methods for Maxwell's Equations. New York.

Nicaise, S., 2000. Exact boundary controllability of maxwell's equations in heterogeneous media and an application to an inverse source problem. SIAM J. Control Optim. 38 (4), 1145–1170.

Nicaise, S., Pignotti, C., 2005. Internal stabilization of maxwell's equations in heterogeneous media. Abstract and Applied Analysis 7, 791–811.

Pazy, A., 1983. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. Springer-Verlag, New York.

Yin, H. M., 2006. Existence and regularity of a weak solution to maxwell's equations with a thermal effect. Math. Meth. Appl. Sci. 29, 1199–1213.