

UM PERFIL DINÂMICO DE PLUMAS ATRAVÉS DA ANÁLISE PERTURBATIVA DA EQUAÇÃO DA DISPERSÃO DE POLUENTES EM COORDENADAS CILÍNDRICAS

Cláudio C. Pellegrini¹, Bardo E. J. Bodmann²

¹UFSJ, São João del-Rei, MG; ²UFRGS, Porto Alegre, RS

RESUMO

O presente trabalho usa métodos de perturbação e coordenadas cilíndricas para simplificar a equação advectivo-difusiva da dispersão de poluentes. Os resultados corroboram os de PELLEGRINI *et al.* (2013), obtidos em coordenadas cartesianas, e exibem interessantes simplificações resultantes da simetria axial inerente ao problema.

SUMMARY

This study uses perturbation techniques and cylindrical coordinates to simplify the advective-diffusive pollutant dispersal equation. The results corroborate the ones obtained by PELLEGRINI *et al.* (2013) in Cartesian coordinates and show some interesting simplifications due to the inherent axial symmetry of the problem.

1- INTRODUÇÃO

Em um trabalho recente, PELLEGRINI *et al.* (2013) utilizaram métodos de perturbação para simplificar a equação 3D advectivo-difusiva da dispersão de poluentes à partir de uma fonte localizada. A revisão lá apresentada mostra que a maioria dos trabalhos anteriores usa coordenadas cartesianas ortogonais, a despeito da geometria da pluma ser mais bem descrita em coordenadas cilíndricas. O presente trabalho refaz a análise de PELLEGRINI *et al.* (2013) em coordenadas cilíndricas mostrando que os resultados lá obtidos também aqui o são, mas com a vantagem de o problema ser inerentemente bidimensional neste sistema.

2- ANÁLISE MATEMÁTICA

Aplicando a decomposição de Reynolds às eqs. da conservação da massa (ECM) de ar e de poluente, para o escoamento de uma pluma 3D, transiente, incompressível, em coordenadas cilíndricas, sem produção de poluente por reação química, com simetria axial e tomando a média temporal segue-se

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r\bar{v}_r)}{\partial r} + \frac{\partial\bar{v}_z}{\partial z} = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r')}{\partial r} + \frac{\partial v_z'}{\partial z} = 0$$
$$\frac{\partial\bar{c}}{\partial t} + \bar{v}_r \frac{\partial\bar{c}}{\partial r} + \bar{v}_z \frac{\partial\bar{c}}{\partial z} = D \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial\bar{c}}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2\bar{c}}{\partial z^2} \right] - \left[\frac{\partial(\overline{c'v_r'})}{\partial r} + \frac{\overline{c'v_r'}}{r} + \frac{\partial(\overline{c'v_z'})}{\partial z} \right]$$

em $0 \leq r \leq R_p$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq z \leq L$, sendo L o comprimento da pluma, R_p seu raio e $L \gg R_p$. Aqui, c é a concentração volumétrica do poluente, $\mathbf{V} = (v_r, v_\theta, v_z)$ é o vetor velocidade e D é a difusividade (molecular) binária do poluente no ar. As condições de fronteira

são $\bar{v}_r(R_p, \theta, z, t) = \bar{v}_{r0}$, $v_z(r, \theta, L, t) \rightarrow v_{z0}$, $\bar{c}(R_p, z, t) = 0$, $\partial\bar{c}/\partial r(0, z, t) = 0$, $\bar{c}(r, 0, t) = c_s(t)$, $\bar{c}(r, L, t) \rightarrow 0$, em que $c_s(t)$ é a concen-tração na fonte e $\mathbf{V}_0 = (v_{r0}, v_{z0})$ é o campo de velocidade não perturbado pela pluma.

Para adimensionalizar as eqs. anteriores propomos $V_r = \bar{v}_r/V_c$, $V_z = \bar{v}_z/U_g$, em que V_c é uma velocidade característica, arbitrária para o presente caso, $T = t/t_c$, sendo t_c um tempo característico das variações da fonte emissora, $R_1 = r/L$, $Z = z/L$, para o ar, sendo L o comprimento horizontal característico da CLA, $R_2 = r/R_p(z)$, $Z = z/L$, para o poluente (logo $R_2 = R_1L/R_p$), $C = \bar{c}/c_s(t)$, $V_r' = v_r'/u_*$, $V_z' = v_z'/u_*$, $C' = c'/c_*$, em que $c_* = -\overline{c'v_r'}/u_*$. Para estirar as coordenadas radiais usamos $\tilde{R}_1 = R_1/\varepsilon$ e $\tilde{R}_1 = (1 - R_1)/\varepsilon$, nas ECM do ar e do poluente, respectivamente, com ε variando em $]0,1]$ e $0 \leq R_1 \leq 1$, pois a física da CLA indica que para o ar a camada limite está localizada próximo à superfície e BUSH (1992) sugere que para eqs. como a ECM de poluente as camadas limite localizam-se nos extremos do domínio ($r = R_p$). Obtém-se para a ECM do ar que $\partial V_r/(\varepsilon\partial\tilde{R}_1) = O(\partial V_z/\partial Z)$ qualquer que seja $O(\varepsilon\tilde{R}_1)$ e a ECM de poluente fica

$$\begin{aligned} \varepsilon_t \frac{\partial C}{\partial T} + \left[-V_r \frac{\partial C}{\partial \tilde{R}_1} + V_z \frac{\partial C}{\partial Z} \right] \\ = \varepsilon_D \left[\frac{\varepsilon^{-2}}{(1 - \varepsilon\tilde{R}_1)} \frac{\partial}{\partial \tilde{R}_1} \left((1 - \varepsilon\tilde{R}_1) \frac{\partial C}{\partial \tilde{R}_1} \right) + \frac{\partial^2 C}{\partial Z^2} \right] \\ - \varepsilon_* \varepsilon_{c_*} \left[-\frac{\partial(C'V_r')}{\varepsilon\partial\tilde{R}_1} + \frac{C'V_r'}{1 - \varepsilon\tilde{R}_1} + \frac{\partial(C'V_z')}{\partial Z} \right] \end{aligned}$$

em que os parâmetros pequenos são $\varepsilon_t = L/U_g t_c$, $\varepsilon_L = R_p/L$, $\varepsilon_D = D/U_g L = 1/Re_D$, $\varepsilon_* = u_*/U_g$ e $\varepsilon_{c_*} = c_*/c_s$. Valores típicos para as variáveis envolvidas em atmosfera neutra podem ser obtidos em PELLEGRINI *et al.* (2013) e $t_c = 3.600$ s. Segue-se que $\varepsilon_D \ll (\varepsilon_* \varepsilon_{c_*})^2$. Simbolicamente a eq. anterior fica

$$O(\varepsilon_t) + O(1) = \varepsilon_D \left[O\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right) + O(1) \right] + \varepsilon_* \varepsilon_{c_*} \left[O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + O(1) \right]$$

Ac Adv Dif_r Dif_z T_{r1} T_{r2} e T_z

Os limites distintivos são mostrados na Tabela 1, que usa $\varepsilon_D \ll (\varepsilon_* \varepsilon_{c_*})^2$. Resultam apenas dois limites distintivos: $\varepsilon = \varepsilon_* \varepsilon_{c_*}$ e $\varepsilon = \varepsilon_D/\varepsilon_* \varepsilon_{c_*}$ pois não há região em que os termos Adv e Dif_r dominem juntos (nesta região quem domina é T_{r1}). O resultado está fisicamente representado na Fig. 1.

3- CONCLUSÕES

O presente trabalho analisou o perfil de concentração em plumas de poluentes resultantes da equação da advecção-difusão utilizando a própria pluma e um sistema de coordenadas cilíndrico associado. A análise mostrou que a pluma pode ser dividida em regiões onde predominam em primeira ordem de aproximação determinados termos da equação original em coordenadas cilíndricas. Os resultados corroboram as conclusões anteriores de Pellegrini *et al.* (2013) no que diz respeito ao efeito físico predominante em cada região.

Tabela 1: Limites distintivos da ECM de poluente

Termos de mesma ordem	Limite distintivo	Ordem de grandeza dos termos da equação			Termos dominantes
		Adv	Dif _r	T _{r1}	
		1	$\varepsilon_D/\varepsilon^2$	$\varepsilon_*\varepsilon_{C^*}/\varepsilon$	
Adv e Dif _r	$\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_D}$	1	1	$\frac{\varepsilon_*\varepsilon_{C^*}}{\sqrt{\varepsilon_D}}$	T _{r1}
Adv e T _{r1}	$\varepsilon = \varepsilon_*\varepsilon_{C^*}$	1	$\frac{\varepsilon_D}{(\varepsilon_*\varepsilon_{C^*})^2}$	1	Adv e T _{r1}
Dif _r e T _{r1}	$\varepsilon = \frac{\varepsilon_D}{\varepsilon_*\varepsilon_{C^*}}$	1	$\frac{(\varepsilon_*\varepsilon_{C^*})^2}{\varepsilon_D}$	$\frac{(\varepsilon_*\varepsilon_{C^*})^2}{\varepsilon_D}$	Dif _r e T _{r1}

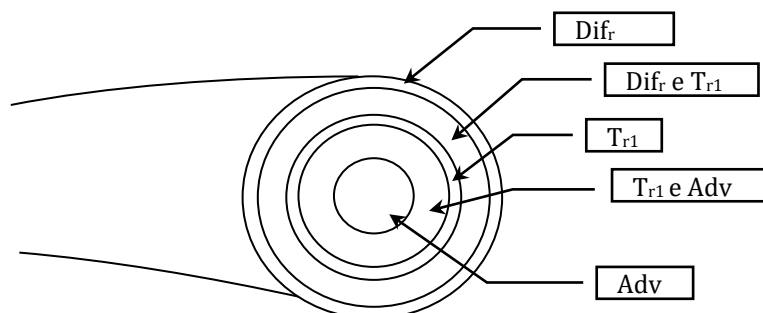


Fig. 1. Regiões de dominância dos termos na ECM poluente.

Agradecimentos: à FAPEMIG e à CAPES.

4- REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BUSH, A. W. **Perturbation Methods for Engineers and Scientists**, CRC Press, USA, 320 pp. 1992
- PELLEGRINI, C. C. ; BUSKE, D. ; BODMANN, B. E. J. ; VILHENA, M. T. A First Order Perturbative Analysis of the Advection-Diffusion Equation for Pollutant Dispersion in the Atmospheric Boundary Layer, **Am. J. Environ. Eng.**, v. 3, p. 48-55, 2013