DOI: 10.5902/2179460X11388
Revista do Centro de Ciências Naturais e Exatas - UFSM
Revista Ciência e Natura, Santa Maria
EISSN: 2179-460X, Edição Esp. Dez. 2013, p. 069 - 072

DERIVAÇÃO DA FREQUÊNCIA INERCIAL EFETIVA DIRETAMENTE DE FORMULAÇÕES DESCRITIVAS DA TURBULÊNCIA

Arcilan Assireu[1, *], João Antônio Lorenzzetti[2], Cláudio Pellegrini[3]

[1]UNIFEI, Itajubá, MG, [2]INPE, São José dos Campos, SP, [3]UFSJ, São João del-Rei, MG
[*]assireu@gmail.com

RESUMO

NIILER (1969) e MOERS (1975) introduziram o conceito da Frequência Inercial Efetiva (FIE), derivada a partir de considerações físicas associadas com escalas espaciais e de gradiente horizontal de velocidade. Neste trabalho, é apresentada uma derivação formal para a FIE e é mostrado que, para escoamentos turbulentos, a modificação da frequência inercial ocorre em uma forma muito mais geral do que inicialmente previsto pelos supra citados autores.

ABSTRACT

NIILER (1969) and MOOERS (1975) introduced the concept of a modified inertial frequency, named Effective Inertial Frequency (EIF), based on physical considerations associated with frontal space and velocity scales. We present a formal derivation of EIF and show that for predominantly turbulent flow, the modification of the inertial frequency occurs in a much more general way than predicted by the space and velocity scale approximation.

INTRODUÇÃO

Evidências teóricas e observacionais suportam a ideia de que, quando o componente vertical da vorticidade relativa (ζ) representa uma fração significativa da componente vertical da vorticidade planetária (*f*), é mais apropriado o uso da frequência inercial efetiva (FIE). Frentes, correntes, jatos e vórtices podem influenciar os processos quase inerciais via interação não linear com o escoamento médio (MOOERS, 1975, KUNZE, 1985, WELLER et al. 1982, POULAIN et al., 1992, YOUNG and BEN JELLOUL, 1997, VAN MEURS, 1997, SHERMAN, 2005, SOBARZO et al. 2007). A relação formal para esta interação foi proposta por

DOI: 10.5902/2179460X11388
Revista do Centro de Ciências Naturais e Exatas - UFSM
Revista Ciência e Natura, Santa Maria
EISSN: 2179-460X, Edição Esp. Dez. 2013, p. 069 - 072

KUNZE (1985) ($FIE \approx f + \zeta / 2$) a qual foi derivada sob a hipótese de uma estratificação contínua e sob argumentos de escala que, na maioria das vezes, torna restritiva a teoria.

É apresentada neste trabalho uma derivação da FIE diretamente na Equação de Navier-Stokes (ENS) onde é mostrado que o FIE pode ser generalizado ao se assumir que a maioria dos escoamentos geofísicos apresentam comportamento turbulento.

A FREQUÊNCIA INERCIAL EM ESCOAMENTOS TURBULENTOS

A discussão que segue é baseada em TENNEKES e LUMLEY (1972). A principal diferença consiste do fato de que é considerada, neste trabalho, a equação do movimento, levando em conta um sistema de coordenadas que gira com velocidade angular Ω_k (associada à rotação da Terra) em oposição ao um sistema de coordenadas não rotacional. A vorticidade relativa ω é dada como

$$\omega_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \qquad (1)$$

em que $\partial u_k / \partial x_j$ é a taxa de deformação e ε_{ijk} é o tensor de permutação. A taxa de deformação é expressa como a soma dos componentes simétricos (s_{ij}) e antissimétricos (r_{ij}). Nós necessitamos considerar somente o tensor antissimétrico dado por:

$$r_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \qquad (2)$$

Alguns dos termos da ENS podem ser reescritos em termos de vorticidade a partir das expressões previamente definidas. Reescrevendo o termo de advecção $u_j \partial u_i / \partial x_j$ na ENS na forma de um tensor de gradiente, obtém-se:

DOI: 10.5902/2179460X11388
Revista do Centro de Ciências Naturais e Exatas - UFSM
Revista Ciência e Natura, Santa Maria
EISSN: 2179-460X, Edição Esp. Dez. 2013, p. 069 - 072

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_i u_j\right) + \upsilon \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + 2\varepsilon_{ijk} u_j \Omega_k \qquad (3)$$

Aplicando-se em 3 a equação da continuidade e reescrevendo

a contribuição da viscosidade também pode ser reescrita em (3) chega-se a:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}(u_j u_j) + \varepsilon_{ijk} u_j \omega_k - \nu \varepsilon_{ijk} \frac{\partial \omega_k}{\partial x_j} + 2\varepsilon_{ijk} u_j \Omega_k \qquad (4)$$

Em um escoamento desprovido de rotação tem-se que ω_k = 0 e a Eq. (4) torna-se:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}(u_j u_j) + 2\varepsilon_{ijk} u_j \Omega_k \,. \qquad (5)$$

Para escoamentos turbulentos, a simplificação acima não se aplica. O termo $\varepsilon_{ijk} u_j \omega_k$ é crucial para a teoria da turbulência. (TENNEKES and LUMLEY, 1972). Note que este termo é análogo a aceleração de Coriolis $2\varepsilon_{ijk} u_j \Omega_k$. O fator 2 é ausente na vorticidade porque esta é duas vezes a velocidade angular do escoamento. Portanto, a partir da combinação destes dois termos, vê-se que o "novo" termo de Coriolis para escoamentos turbulentos fica:

$$\varepsilon_{ijk}\left(\omega_k + 2\Omega_k\right) u_j \,. \qquad (6)$$

Aplicando $\omega_k = 2\Omega_{kf}$, onde Ω_{kf} é a velocidade angular do fluido, em (6) e fazendo-se $\omega_k = \zeta = \partial u / \partial x - \partial v / \partial y$ em que ζ é a vorticidade relativa, conclui-se que o termo $f = 2\Omega \sin \phi$ nesta nova formulação é equivalente a:

DOI: 10.5902/2179460X11388
Revista do Centro de Ciências Naturais e Exatas - UFSM
Revista Ciência e Natura, Santa Maria
EISSN: 2179-460X, Edição Esp. Dez. 2013, p. 069 - 072

$$f + \zeta / 2 = f_* \tag{7}$$

onde f_*, a frequência inercial efetiva (FIE), é a vorticidade planetária relacionada a frequência de Coriolis perturbada pela metade da vorticidade relativa do fluido.

CONCLUSÃO

A Equação (12), embora formalmente lembre a vorticidade absoluta (PEDLOSKY, 1979), não surgiu da equação da vorticidade e, dinamicamente, a sua conotação é diferente da vorticidade absoluta. A obtenção de f_*, a partir da Eq. (12), diferentemente dos autores citados ao longo deste trabalho não é baseada em considerações de escala, tendo surgido diretamente dos termos inerciais da ENS. Isto repercute em uma generalização para a FIE.

AGRADECIMENTOS

À FAPEMIG e ao CNPq pelo apoio.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

MOOERS, C. N. K. Several effects of a baroclinic current on the cross-stream propagation of inertial-waves. **Geophysical Fluid Dynamics**, 6, 245-275, 1975.

NIILER, P. P. On the Ekman divergence in an Oceanic jet. **Journal of Geophysical Research**., 74, 7048-7052, 1969.

PEDLOSKY, J. Geophysical Fluid Dynamics, **Springer-Verlag**, New York., 31, 624pp, 1979.

TENNEKES, H., and J. L. LUMLEY. A first course in Turbulence, **The MIT Press**, 300pp, 1972.